

Plán vyučovacej hodiny

Názov:	Guľôčky			
Počet hodín:	1 - 2 vyučovacie hodiny			
Ročník/vek:	9. ročník ZŠ			
Stručný opis:	Modelovaním reálnej situácie vytvoríme prvotnú predstavu o lineárnej funkcii. Ide o rastúcu lineárnu funkciu, ktorej definičný obor sú nezáporné celé čísla. Na vyučovacej hodine sa prioritne zameriame na kovariančný aspekt pojmu funkcia – zmena objemu v nádobe v závislosti od počtu vložených guľôčok. Žiaci budú pracovať s rôznymi reprezentáciami funkcie (s tabuľkou, grafom, slovným opisom, prípadne s predpisom).			
Princípy tvorby:	Bádanie			
	Situačnosť			
	Digitálne nástroje			
	Embodiment			
Funkčné myslenie:	Vstup - Výstup			
	Kovariancia			
	Korešpondencia			
	Objekt			
Vzdelávacie ciele:	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Vedieť vyplniť hodnoty do tabuľky a vyznačiť ich v grafe ✓ Vedieť vysvetliť, čo ovplyvňuje objem v nádobe ✓ Uvedomiť si, že body grafu ležia na jednej priamke ✓ Porozumieť významu priesečníka s osou y v danom kontexte ✓ Porozumieť významu smernice priamky v danom kontexte ✓ Prepájať rôzne reprezentácie pojmu funkcia (tabuľka, graf, predpis a slovný opis) ✓ Na základe tabuľky a grafu odvodiť predpis funkcie ✓ Uvedomiť si, že pri zovšeobecňovaní úlohy je potrebné zväžiť vplyv počiatočných podmienok na reálnosť modelovania situácie (objem vody na začiatku, veľkosť guľôčok, rozmery nádoby tvaru valca, do ktorej vhadzujeme guľôčky a pod.) ✓ Vedieť, že predpis v tvare $y = kx + q$ má funkcia, ktorá sa nazýva lineárna ✓ Pozorovať niektoré vlastnosti lineárnej funkcie, napr. grafom je priamka alebo jej časť, ak je koeficient k v predpise funkcie kladné tak je funkcia rastúca, ak je záporné, tak klesá, rovnomerný rast, resp. klesanie funkcie, určenie „vhodných“ funkčných hodnôt pre odvodenie predpisu, zakreslenie grafu 			

This material is provided by the [FunThink team](#), responsible institution: Pavol Jozef Šafárik University in Košice, Slovakia.



Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under a Creative Commons License ([CC BY-SA 4.0](#)). Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Aktivity

Hodina číslo 1

Zapojenie

Aktivita 1

Niekoľko dní neustále páľilo slnko a celá krajina bola vysušená. Zoslabnutá vrana krúžila nad krajinou a márne hľadala, čoho by sa napila. Vedela, že ak čoskoro nenájde vodu, tak zahynie od smädu. Keď už stratila takmer všetku nádej, zosadla na zem. Do očí jej udrel starý krčah položený pri kôpke kamienkov. Vrana k nemu pomaly prišla a zvedavo doň nazrela. Na dne krčahu bola voda. Vrana dychtivo vopchala hlavu do krčahu, no mala prikrátky zobák a na vodu nedočiahla. Vedela, že ak by krčah prevrátila, tak by voda vytekla a vsiakla do zeme. V tej chvíli vrane čosi zišlo na um. Čo myslíte, ako sa jej podarilo napíť sa?

- Žiakov rozdelíme na začiatku hodiny do skupín a rozdáme im pracovné listy. V každej skupine sú traja žiaci (ak je to nutné, tak dáme do niektorých skupín štyroch žiakov).
- Po spoločnom prečítaní príbehu, žiakom každá skupina spoločne sformuluje svoje návrhy a zapíše ich do pracovného listu.

Odporúčané pomôcky/materiály: pracovné listy pre každého žiaka (pracovný list budeme používať počas celej vyučovacej hodiny)

Aktivita 2

Máte k dispozícii odmerku, v ktorej je 150 ml vody.

- Koľko dielikov na odmerke zodpovedá 50 ml v nádobe?*
- Koľko ml je jeden dielik?*
- Ak hladina stúpne o dva dieliky, tak o koľko ml stúpla?*
- Najmenej koľko guľôčok je potrebné vhodiť do odmerky, aby sa hladina zdvihla o 50 ml? Odhadnite bez vhadzovania guľôčok.*

- Na začiatku aktivity rozdáme do každej skupiny odmerný valec.
- Aktivita je zameraná na oboznámenie sa s pomôckami. Žiaci by mali zistiť, že 50 ml zodpovedá 10 dielikom a teda 1 dielik je 5 ml a ak hladina stúpne o dva dieliky, tak stúpla o 10 ml.
- V časti d) skupina žiakov zapíše odhad, na ktorom sa dohodnú, do pracovných listov. Je možné, že niektorý zo žiakov použije pri odhade priamu úmernosť.
- Po prvých dvoch aktivitách nasleduje spoločná diskusia. Žiaci hovoria učiteľovi svoje nápady k aktivite 1. Je možné, že niekto navrhne, aby vrana vhodila do krčahu kamienky. Môžeme spomenúť, že ide o známu Ezopovu bájku **O vrane a krčahu s vodou**, z ktorej vyplýva poučenie: Núdzu človeka naučí, ako si poradiť.
- Odhady jednotlivých skupín v aktivite 2d) zapíšeme na tabuľu, aby sme ich po realizácii ďalšej aktivity mohli vyhodnotiť.

Odporúčané pomôcky/materiály: odmerný valec s objemom aspoň 300 ml a s priemerom cca 5 cm, sklenené guľôčky

Odhadovaný čas: 10 minút pre Aktivitu 1 a 2

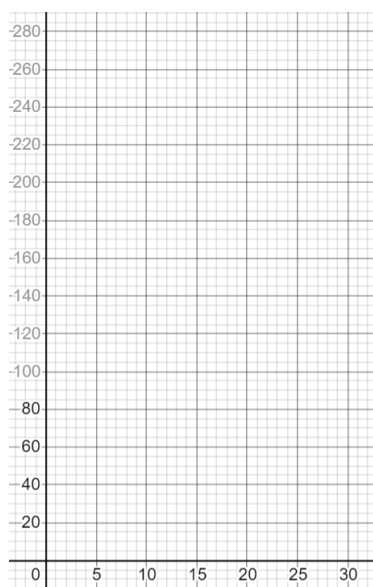
Skúmanie

Aktivita 3

Do odmerky, v ktorej je 150 ml vody, vhodte 5 guľôčok. Následne do tabuľky zapíšte, aký je objem v odmerke v ml. Opakujte postup – vhadzujte vždy 5 guľôčok a zapisujte objem do tabuľky.

Hodnoty, ktoré ste dostali, zakreslite do grafu v súradnicovej sústave.

Počet guľôčok vo vode	Objem v odmerke v ml
0	
5	
10	
15	
20	
25	



- Každá skupina realizuje experiment, vyplní tabuľku a zakresľuje zistené hodnoty do grafu.

Odporúčané pomôcky/materiály:

- Odmerný valec s objemom aspoň 300 ml a s priemerom cca 5 cm,
- rovnaké sklenené guľôčky v počte 20 – 30 pre jednu skupinu (objem 5 guľôčok musí byť 10 ml – v prípade, že máme k dispozícii guľôčky s iným objemom, tak je potrebné prispôsobiť čísla v úlohách a aktivitách),
- nádoba na prípadné prelievanie vody a odkladanie guľôčok,
- papierové utierky,
- pracovný list.

Aktivita 4

Prezrite si graf a tabuľku, ktoré ste dostali (v Aktivite 3). Napíšte aspoň 3 rôzne pozorovania (buď z tabuľky alebo z grafu).

- Žiaci môžu pozorovať:
 - o S piatimi pridanými guľôčkami sa nám hladina zdvihne o dva dieliky.
 - o Výška hladiny sa zvyšuje s počtom pridaných guľôčok.
 - o Jednotlivé body grafu ležia na priamke.
 - o Graf je rastúci.
 - o Graf začína v bode so súradnicami $[0, 150]$.

Odporúčané pomôcky/materiály: pracovné listy

Aktivita 5

- a) Predpovedajte objem v odmerke, ak v nej bude vhođených spolu 35 guľôčok.
- b) Čo myslíte, ako sa to bude vyvíjať, keď vhoďíme ďalších 15 guľôčok?
- c) O koľko sa zväčší objem v odmerke, ak vhoďíme jednu guľôčku?
- d) Vyplňte tabuľku:

Počet guľôčok vo vode	0	1	2	3	5	12	30	80	x
Objem v odmerke v ml									

- e) Čo by sa zmenilo, ak by sme mali na začiatku vodu vo výške 250 ml, 200 ml, 10ml?
- f) Čo by sa zmenilo, ak by sme mali na začiatku väčšie, resp. menšie guľôčky?

- Očakávané odpovede sú:
 - a) S piatimi pridanými guľôčkami sa nám hladina zdvihne o 10 ml, takže pri 35 to bude o 7 krát 10 ml, teda 70 ml.
 - b) Ak pridáme ďalších 15 guľôčok, tak sa zvýši o ďalších 30 ml.
 - c) S piatimi pridanými guľôčkami sa nám hladina zdvihne o 10 ml, takže jedna guľôčka zvýši hladinu o 2 ml.
 - d) $y = 150 + 2x$ je predpis hľadanej funkcie. Jej definičný obor je však od 0 do 75. Pri väčšom počte guľôčok sa totiž neponorí celá guľôčka, takže zovšeobecnenie pre 80 guľôčok neplatí.
 - e) Žiaci by si mali uvedomiť, že v predpise sa zmení hodnota 150 na novú hodnotu počiatočného objemu. Niektorí žiaci by si mohli uvedomiť aj zmenu definičného oboru a diskutovať o tom ako to bude v prípade objemu 10 ml. Nie je tento objem príliš malý?
 - f) Objem guľôčky má vplyv na zmenu koeficientu pri x. Napríklad, ak bude objem guľôčky 3 ml, tak koeficient bude 3.

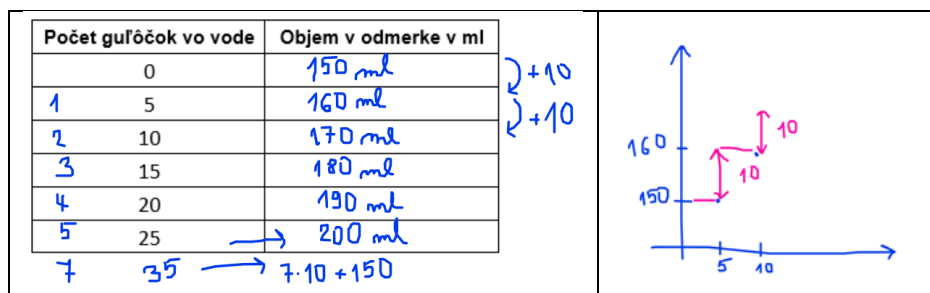
Odporúčané pomôcky/materiály: pracovné listy

Odhadovaný čas: 25 minút (spolu s Aktivitou 3 a 4)

Vysvetlenie

Po aktivite 5 nasleduje spoločná diskusia všetkých skupín a porovnanie výsledkov riešení úloh postupne od Aktivity 3. Porovnáme tiež odhad z Aktivity 2 so skutočnou hodnotou, ktorú žiaci dostali pri realizácii Aktivity 3.

Učiteľ na tabuli sumarizuje pozorovania žiakov, spresňuje formulácie žiakov z Aktivity 4 (napr. rastúca funkcia, nie stúpajúca a pod.), prípadne doplní obrázky podobné nižšie uvedeným na vizualizáciu rovnomerného rastu funkcie:



Je možné, že väčšina skupín do tabuľky v Aktivite 5 zapíše aj hodnotu pre 80 guľôčok. V takom prípade môžeme v jednom odmernom valci realizovať experiment. Očakávame, že žiaci sami prídu na to, že objem guľôčok nemôže presiahnuť objem vody. To nám dáva možnosť diskutovať o pojme definičný obor funkcie. Definičný obor pre našu funkciu je množina prirodzených čísel (vrátane čísla 0) do čísla 75, keďže v odmerke je 150 ml a objem jednej guľôčky je 2 ml.

Odhadovaný čas: 10 minút

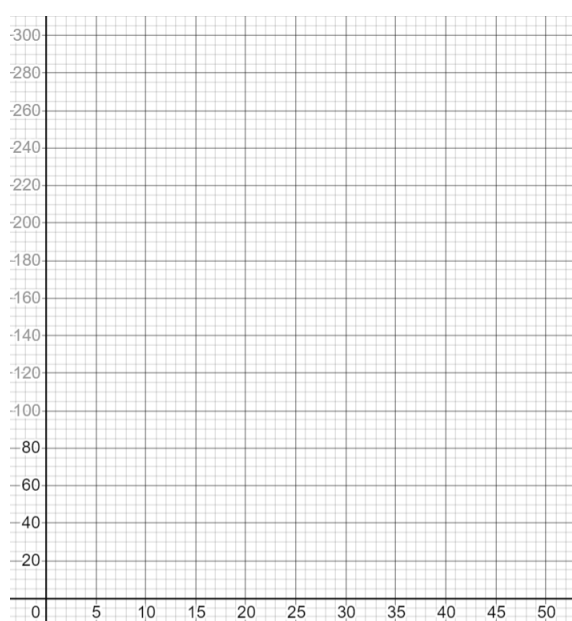
Rozpracovanie a hodnotenie

Aktivita 6

Čo sa stane, ak budeme z nádoby, v ktorej je voda a 50 ponorených guľôčok, guľôčky vyberať? Skúste vyplniť tabuľku a zakresliť graf.

Ak si nie ste istí, ako to bude vyzerať, tak experiment realizujte.

Počet guľôčok vybraných z odmerky	0	5	10	15	20	25	50	x
Objem v odmerke v ml	250							



V aktivite ide o klesajúcu funkciu. Sledujeme, či žiaci vedú odvodíť všeobecný predpis a či sa zamyslia aj nad definičným oborom funkcie. Výsledok je $y = 250 - 2x$, kde x je prirodzené číslo z intervalu $\langle 1, 50 \rangle$.

Odporúčané pomôcky/materiály:

- Odmerný valec s objemom aspoň 300 ml a s priemerom cca 5 cm,
- rovnaké sklenené guľôčky v počte 20 – 30 pre jednu skupinu
- nádoba na prípadné prelievanie vody a odkladanie guľôčok
- papierové utierky,
- pracovný list.

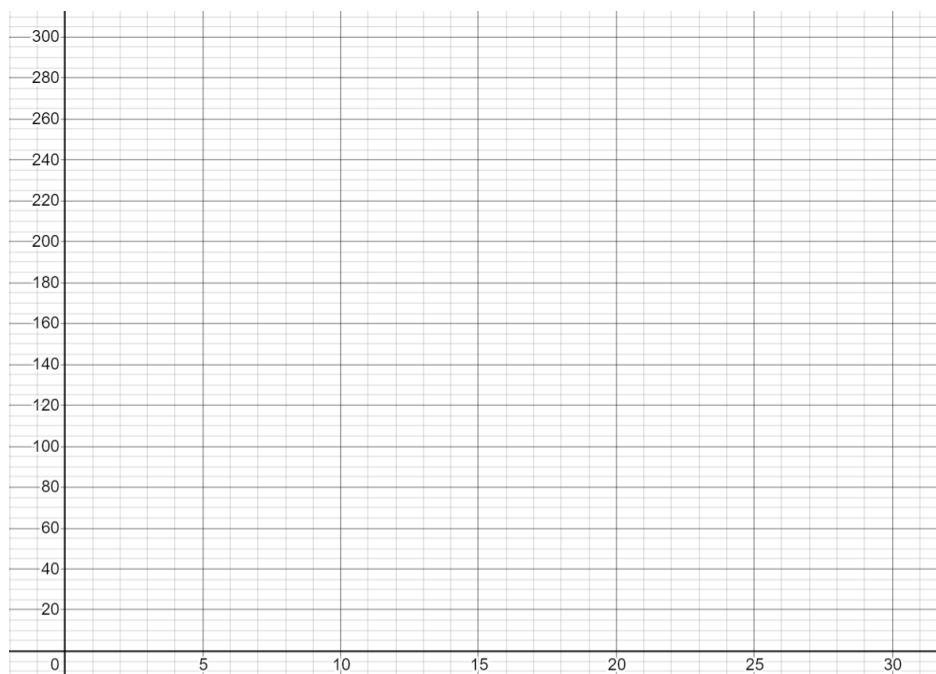
Odhadovaný čas: 10 minút

Aktivita 7

Uvažujme situáciu, že v odmerke máme 200 ml vody a máme väčšie guľôčky. S každou vhadzovanou guľôčkou sa teraz objem zvyšuje o 5 ml. Bez toho, aby ste vhadzovali guľôčky, skúste vyplniť tabuľku.

Počet guľôčok vo vode	0	1	2	3	12	15	20	x
Objem v odmerke v ml								

Načrtnite graf.



- Na rozdiel od predchádzajúcich aktivít žiaci realizujú aktivitu bez pomôcok. Žiaci by si mali všimnúť, že táto funkcia rastie rýchlejšie a v predpise funkcie sa zmení koeficient pred x (smernica funkcie). Výsledný predpis je $y = 5x + 200$.

Odporúčané pomôcky/materiály: pracovné listy

Odhadovaný čas: 10 minút

Vysvetlenie

Aktivita 8

V ľavom stĺpci tabuľky sú predpisy, s ktorými ste sa stretli pri práci s guľôčkami. Do pravého stĺpca napíšte, čo ste si v súvislosti s daným predpisom všimli.

Predpis	Pozorovanie
$y = 150 + 2x$	
$y = 250 + 2x$	
$y = 200 + 2x$	
$y = 10 + 2x$	
$y = 250 - 2x$	
$y = 200 + 5x$	

- Žiaci môžu do pozorovania zapísať vlastnosti grafov (rastúci, klesajúci, body ležia na priamke, priesečníky s osou y , prípadne x pre klesajúcu funkciu, definičný obor funkcie – opísaný vlastnými slovami, obor hodnôt funkcie – opísaný vlastnými slovami, a pod.). Niektoré skupiny môžu zapísať pozorovania, ktoré úzko súvisia s kontextom úlohy.

Aktivita 9

Uvedte, čo majú predpisy z predchádzajúcej aktivity spoločné.

- Očakávame, že si niektoré skupiny všimnú, že všetky predpisy majú tvar $y = q + kx$. Pre žiakov je prirodzené, že predpis zapíšu v neštandardnom tvare (prehodené poradie sčítancov kx a q)
- V tejto etape hodiny učiteľ môže neformálne zaviesť pojem lineárna funkcia ako funkcia, ktorej predpis je $y = kx + q$ (tu je možné poradie sčítancov kx a q vymeniť ako je zvykom, pričom učiteľ sa môže odvolať na komutatívny zákon sčítania).

Aktivita 10

a) Zvoľte si kritérium, podľa ktorého rozdelíte predpisy z aktivity 8 do skupín. Zapíšte toto kritérium.

b) Podľa zvoleného kritéria rozdeľte predpisy do skupín.

Žiaci si môžu zvoliť nasledujúce kritéria:

- Priesečník s osou y (žiakmi môže byť sformulované napr. „podľa prvého čísla v predpise“)
- Smernica (žiakmi sformulované ako „podľa čísla pri x “)

Aktivita umožní učiteľovi so žiakmi diskutovať o tom, čo vieme vyčítať z predpisu funkcie o vlastnostiach grafov. Ak žiaci uvedené vlastnosti nepozorujú, tak to nie je nutné uzavrieť počas tejto vyučovacej hodiny.

Odporúčané pomôcky/materiály (pre aktivity 8 až 10): pracovné listy

Odhadovaný čas: 15 minút

Aktivita 11

Uhádnite predpis funkcie.

- Hru sa zahráme, ak máme na vyučovacej hodine dostatok času.
- Učiteľ si myslí predpis lineárnej funkcie a úlohou žiakov je uhádnuť tento predpis.
- Na tabuli zapisujeme hodnoty x , ktoré volia žiaci a učiteľ následne doplní vypočítanú hodnotu y .

Priebeh hry na tabuli môže vyzerať ako na obrázku nižšie. Cieľom hry je doplniť predpis do žltého políčka na základe zistených hodnôt.

x	1	50	...
	2	149	...

- Žiaci môžu počas hry objaviť nasledujúce vlastnosti:
 - o je výhodné, aby učiteľovi zadali $x = 0$ (zistíme hodnotu q)
 - o stačí zadať dve čísla pre jeden predpis

- je výhodné, aby druhé zvolené číslo bolo 1
- Navrhujeme voliť lineárne funkcie, ktoré majú rôzne vlastnosti (absolútny člen je kladný, záporný alebo 0, smernica je kladné číslo, záporné číslo, 0, číslo menšie ako 1, zlomok, desatinné číslo) Nižšie uvádzame príklady možných predpisov lineárnych funkcií:

$$y = 2x, y = x + 5, y = 2x + 3, y = -2x - 3, y = -10x + 5, y = 1000x + 658,$$

$$y = 500x - 341, y = -100x + 92, y = \frac{1}{2}x - 3, y = -9x + \frac{2}{5}, y = \frac{1}{100}x + \frac{9}{10}$$

Odhadovaný čas: 10 minút