

Πλάνο Μαθήματος

Ενότητα:	Μοτίβα			
Ώρες διδασκαλίας:	6 x 40 λεπτά			
Επίπεδο τάξης/Ηλικιακό Εύρος:	6 ^η τάξη (11-12 χρονών)			
Σύντομη Περιγραφή:	Η ενότητα αυτή εμπλέκει τους μαθητές με αναπτυσσόμενα μοτίβα. Οι μαθητές συμμετέχουν στον εντοπισμό και στην αναπαράσταση αναπτυσσόμενων μοτίβων και στην εύρεση αναδρομικών και συναρτησιακών σχέσεων.			
Αρχές Σχεδιασμού:	Μάθημα με βάση τη Διερεύνηση			
	Αξιοποίηση Ρεαλιστικών Σεναρίων			
	Ψηφιακά Εργαλεία			
	Ενσώματη Μάθηση			
	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Διερεύνηση: Εξερεύνηση αναδρομικών και συναρτησιακών σχέσεων ✓ Αξιοποίηση Ρεαλιστικών Σεναρίων: Βασισμένα στις εμπειρίες των μαθητών ✓ Ψηφιακά Εργαλεία: συσκευές tablet εξοπλισμένες με κατάλληλα εφαρμογίδια ✓ Ενσώματη Μάθηση: Αντιληπτικές-κινητικές εμπειρίες με την παρατήρηση της σχέσης συνδιακύμανσης και αντιστοιχίας 			
Πτυχής Μελέτης Συνάρτησης:	Ως διαδικασία Είσοδος/Εξοδος			
	Ως διαδικασία Συμμεταβολής			
	Ως διαδικασία Αντιστοίχισης			
	Ως διαδικασία Μαθηματικών Αντικειμένων			
Στόχοι:	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Να αναγνωρίζουν αναπτυσσόμενα και επαναλαμβανόμενα μοτίβα ✓ Να αναπαριστούν και να περιγράφουν αναπτυσσόμενα μοτίβα χρησιμοποιώντας λέξεις, πίνακα, γραφικές παραστάσεις κτλ. ✓ Να επεκτείνουν τα μοτίβα χρησιμοποιώντας διαφορετικούς τρόπους σκέψης ✓ Να εντοπίζουν τις σχέσεις συνδιακύμανσης και αντιστοιχίας στα αναπτυσσόμενα μοτίβα ✓ Να εκφράζουν τις σχέσεις (λεκτικά/συμβολικά) και να τις γενικεύουν 			

Το υλικό αυτό παρέχεται από την ομάδα [FunThink Team](#), Υπεύθυνο Ίδρυμα: Ομάδα Διδακτικής των Μαθηματικών – Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Μάριος Πιτάλης (pittalis.marios@ucy.ac.cy)
 Ελένη Δημοσθένους (demosthenous.eleni@ucy.ac.cy)
 Ελένη Οδυσσέως (odysseos.o.eleni@ucy.ac.cy)
 Σωτήρης Λοϊζιάς (loizias.soteris@gmail.com)



Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under a Creative Commons License ([CC BY-SA 4.0](#)). Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

Η υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής στην παραγωγή της παρούσας έκδοσης δεν συνιστά αποδοχή του περιεχομένου, το οποίο αντικατοπτρίζει αποκλειστικά τις απόψεις των συντακτών, και η Επιτροπή δεν μπορεί να αναλάβει την ευθύνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Δραστηριότητες

Εξερευνήσεις:

Εξερεύνηση 1

Στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές αναμένεται να εξερευνήσουν τη δομή ενός αναπτυσσόμενου μοτίβου, αυτό της Ανθρώπινης Πυραμίδας, και στη συνέχεια να εξηγήσουν πώς μπορούν να κατασκευάσουν μία μεγαλύτερη πυραμίδα (όχι απαραίτητα την «επόμενη»). Στη συνέχεια, ο/η εκπαιδευτικός θα επιλέξει μαθητές για να παρουσιάσουν τη δουλειά τους.

Χρήσιμες ερωτήσεις: Πόσοι άνθρωποι χρειάζονται για να φτιάξετε την πυραμίδα σας; Πόσοι άνθρωποι χρειάζονται στη βάση της πυραμίδας; Πόσοι άνθρωποι χρειάζονται για να δημιουργήσετε την επόμενη μεγαλύτερη πυραμίδα; Θα μπορούσαμε να δημιουργήσουμε μια πυραμίδα με 16 ανθρώπους;

Προτεινόμενα εργαλεία/υλικά: Βίντεο

Εκτιμώμενη διάρκεια: 15 λεπτά

Εξερεύνηση 2

Στη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές εργάζονται σε ζευγάρια χρησιμοποιώντας την εφαρμογή «Δρομέας και Σχήματα». Οι μαθητές καλούνται να εξερευνήσουν την εφαρμογή, να μάθουν πώς λειτουργεί και να σύρουν τον δρομέα για να φτιάξουν διαφορετικές πυραμίδες. Ακολούθως καλούνται να απαντήσουν πόσα τετράγωνα χρειάζονται για την κατασκευή της επόμενης πυραμίδας (Πυραμίδα 12) και να εξηγήσουν πώς μπορούν να βρίσκουν τον αριθμό των τετραγώνων όταν γνωρίζουν τον αριθμό της πυραμίδας.

Χρήσιμες ερωτήσεις: Πόσα τετράγωνα χρειάζονται για την κατασκευή της Πυραμίδας 12, Πυραμίδας 13 και Πυραμίδας 14; Τι παρατηρείς; Τι αλλάζει και τι μένει το ίδιο κάθε φορά; Πόσα περισσότερα τετράγωνα χρειάζονται κάθε φορά; Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τα τετράγωνα που χρειάζονται για την Πυραμίδα 12 χωρίς να τα μετρήσουμε;

Προτεινόμενα εργαλεία/υλικά: Εφαρμογίδιο Geogebra

Εκτιμώμενη διάρκεια: 15 λεπτά

Δραστηριότητες

Δραστηριότητα 1

Οι μαθητές καλούνται να εξερευνήσουν την εφαρμογή. Μεταβάλλουν τον αριθμό των γκρίζων τετραγώνων και των πράσινο τετραγώνων ψάχνοντας να βρουν πώς αναπτύσσονται τα μοτίβα. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή, κάθε επόμενος όρος ισούται με το άθροισμα των δύο προηγούμενων όρων πλην ένα.

Προτεινόμενα εργαλεία/υλικά: Εφαρμογίδιο Geogebra

Εκτιμώμενη διάρκεια: 10 λεπτά

Δραστηριότητα 2

Οι μαθητές καλούνται να εξερευνήσουν την εφαρμογή, να μάθουν πώς λειτουργεί και να σύρουν τον δρομέα για να μεταβάλουν τον αριθμό των γκρίζων τετραγώνων. Σε κάθε εφαρμογή, ισχύει ο ίδιος αναδρομικός κανόνας κατά την αλλαγή του αριθμού των γκρίζων τετραγώνων. Ο/Η εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να διατυπώσουν υποθέσεις για τον κανόνα του μοτίβου και στη συνέχεια να τις ελέγξουν χρησιμοποιώντας την επιλογή «Επόμενα σχήματα».

Χρήσιμες ερωτήσεις: Πώς συνεχίζεται το μοτίβο; Γιατί είναι μοτίβο; Πώς θα περιγράφατε το μοτίβο σε κάποιον που δεν το έχει δει; Να βρείτε ένα διαφορετικό τρόπο να περιγράψετε το μοτίβο. Πόσα περισσότερα τετράγωνα έχει κάθε επόμενο σχήμα;

Επιπλέον, οι μαθητές αναμένεται να βρουν τη σχέση αντιστοιχίας μεταξύ του αριθμού του σχήματος και του αριθμού των τετραγώνων χρησιμοποιώντας διαφορετικές αναπαραστάσεις (λέξεις, πίνακες, σύμβολα). Για παράδειγμα, όταν Αριθμός γκρίζων τετραγώνων=1, ο κανόνας είναι Σχήμα $n=2n-1$. Όταν Αριθμός γκρίζων τετραγώνων=2, ο κανόνας είναι Σχήμα $n=2n$ και όταν Αριθμός γκρίζων τετραγώνων=3, ο κανόνας είναι Σχήμα $n=2n+1$.

Προτεινόμενα εργαλεία/υλικά: Tablet, Εφαρμογίδιο Geogebra

Εκτιμώμενη διάρκεια: 30 λεπτά

Δραστηριότητα 3

Η δραστηριότητα αυτή βασίζεται σε ένα σενάριο στο οποίο ο Χρίστος δημιουργεί σχέδια για υφάσματα. Το μοτίβο περιλαμβάνει τρεις ποσότητες: τον αριθμό των γκρίζων τετραγώνων, τον αριθμό των μαύρων τετραγώνων και τον συνολικό αριθμό των τετραγώνων.

Οι ερωτήσεις (α), (β) και (γ) εμπλέκουν τους μαθητές στον εντοπισμό και την περιγραφή της δομής του μοτίβου, ενώ η ερώτηση (δ) εμπλέκει τους μαθητές στη διατύπωση του αναδρομικού κανόνα με γενικούς όρους, καθώς οι μαθητές ερωτώνται πόσα περισσότερα τετράγωνα θα έχει κάθε διαδοχικό τμήμα. Στη συνέχεια, στην ερώτηση (ε), οι μαθητές ενθαρρύνονται σταδιακά να βρουν τη συναρτησιακή σχέση μεταξύ του αριθμού των μαύρων τετραγώνων και του συνολικού αριθμού τετραγώνων. Οι μαθητές καλούνται να εργαστούν προς τα εμπρός από τον αριθμό των μαύρων τετραγώνων για να βρουν τον συνολικό αριθμό των τετραγώνων και επίσης να εργαστούν προς τα πίσω από τον συνολικό αριθμό των τετραγώνων στον αριθμό των μαύρων τετραγώνων. Στην ερώτηση (στ), δίνεται ο γενικός κανόνας και οι μαθητές καλούνται να εξηγήσουν γιατί ισχύει αυτός ο κανόνας.

Οι μαθητές θα μπορούσαν να εργαστούν ατομικά για τις Ερωτήσεις (α)-(ε), στη συνέχεια να συζητήσουν με τους συμμαθητές τους την Ερώτηση (στ). Θα ακολουθήσει συζήτηση στην ολομέλεια, όπου οι μαθητές θα εξηγήσουν πώς συμπλήρωσαν τους πίνακες και γιατί λειτουργεί ο κανόνας του Χρίστου.

Προτεινόμενα εργαλεία/υλικά: Φύλλο εργασίας με πλέγμα

Εκτιμώμενη διάρκεια: 30 λεπτά

Δραστηριότητα 4

Οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιήσουν το εφαρμογίδιο και να φτιάξουν δικά τους μοτίβα χρησιμοποιώντας ψηφιακά τα σχήματα μοτίβου. Τα μοτίβα των μαθητών μπορεί να είναι επαναλαμβανόμενα ή αναπτυσσόμενα (ανάλογα με το επίπεδό τους). Επίσης, ο/η

εκπαιδευτικός θα μπορούσε να καθορίσει κριτήρια στην κατασκευή των μοτίβων των μαθητών (π.χ. κάθε φορά να προσθέτω 2, ο γενικός κανόνας να είναι $2n-1$).

Προτεινόμενα εργαλεία/υλικά: Tablet, Εφαρμογίδιο

Εκτιμώμενη διάρκεια: 10 λεπτά

Δραστηριότητα 5

Οι μαθητές ασχολούνται με ένα αναπτυσσόμενο γεωμετρικό μοτίβο. Η εργασία βασίζεται στις εμπειρίες των μαθητών με τις προηγούμενες δραστηριότητες και σκοπεύει να προσφέρει περαιτέρω ευκαιρίες για εξάσκηση εμπλέκοντας τους μαθητές με μια δομημένη σειρά ερωτήσεων.

(Οι ερωτήσεις (β)-(η) θα μπορούσαν να προσαρμοστούν για άλλες δομές μοτίβων, εάν απαιτείται περαιτέρω εξάσκηση)

Προτεινόμενα εργαλεία/υλικά: Φύλλο εργασίας με πλέγμα, Κύβοι

Εκτιμώμενη διάρκεια: 40 λεπτά

Δραστηριότητες Επέκτασης:

Η ενότητα αυτή παρουσιάζει δραστηριότητες διαφορετικού επιπέδου δυσκολίας.

Στη Δραστηριότητα 1, οι μαθητές αναμένεται να ασχοληθούν με ένα μοτίβο από τη φύση. Ζητείται από τους μαθητές να βρουν τον αριθμό των εξαγώνων για το 3^ο βήμα της κηρήθρας. Στη συνέχεια, οι μαθητές οργανώνουν τις πληροφορίες τους σε έναν πίνακα, στον οποίο η αντιστοιχία μεταξύ του αριθμού βήματος και του αριθμού των εξαγώνων αρχίζει να γίνεται πιο ορατή. Ζητείται επίσης από τους μαθητές να βρουν πόσα ακόμα εξαγώνια χρειάζονται για το 4^ο βήμα, προκειμένου να εντοπίσουν πώς αλλάζει το σχέδιο καθώς μεγαλώνει. Οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες. Επιλεγμένες ομάδες μοιράζονται την εργασία τους με όλη την τάξη.

Στη Δραστηριότητα 2, οι μαθητές ασχολούνται με ένα ακόμη εφαρμογίδιο στο οποίο μπορούν να μεταβάλουν τον αριθμό των γκρίζων τετραγώνων. Καλούνται να βρουν τον κανόνα του μοτίβου (αναδρομικός κανόνας) και να ελέγξουν την απάντησή τους επιλέγοντας «Επόμενα σχήματα». (Όταν ο Αριθμός γκρίζων τετραγώνων=1, τότε παρουσιάζεται η ακολουθία Fibonacci).

Στη Δραστηριότητα 3, ασχολούνται και πάλι με την ακολουθία Fibonacci. Αναμένεται να γίνουν συνδέσεις με την προηγούμενη εφαρμογή (αριθμός γκρίζων τετραγώνων=1). Οι μαθητές καλούνται να περιγράψουν τον κανόνα, να εξηγήσουν πώς συνεχίζεται η ακολουθία και να περιγράψουν τη γραφική αναπαράσταση της ακολουθίας Fibonacci. Επιπλέον, οι μαθητές ασχολούνται με το πώς η ακολουθία Fibonacci εμφανίζεται σε ένα κέλυφος χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση. Επίσης, οι μαθητές μπορούν να ασχοληθούν με την αναδημιουργία της ακολουθίας Fibonacci χρωματίζοντας τετράγωνα σε χαρτί πλέγματος.

Στη Δραστηριότητα 4, οι μαθητές καλούνται να δημιουργήσουν το δικό τους αναπτυσσόμενο μοτίβο χωρίς κανέναν περιορισμό και στη Δραστηριότητα 5, με τον περιορισμό ενός δοσμένου κανόνα. Για τη Δραστηριότητα 4, οι μαθητές χρειάζεται να αποφασίσουν πώς θα αναπτύσσεται το μοτίβο με συστηματικό τρόπο και ποιος θα είναι ο πρώτος όρος. Για τη Δραστηριότητα 5, οι μαθητές θα πρέπει να ερμηνεύσουν τον κανόνα, να κατανοήσουν τι σημαίνει το $4n$ και το $+4$.

Ο δάσκαλος μπορεί να δώσει υποδείξεις, εάν χρειάζεται, ώστε οι μαθητές να αναζητήσουν μοτίβα που έχουν ήδη μελετήσει με τον ίδιο κανόνα.

Στη Δραστηριότητα 6, οι μαθητές εμπλέκονται με ένα αυξανόμενο αριθμητικό μοτίβο. Οι μαθητές αναμένεται να εργαστούν από τον αναδρομικό κανόνα προς την εύρεση ενός συναρτησιακού κανόνα που συνδέει τη θέση με τον αριθμό και να τον εκφράσουν λεκτικά και συμβολικά.

Προτεινόμενα εργαλεία/υλικά: Εφαρμογίδιο Geogebra, χαρτί με πλέγμα

Εκτιμώμενη διάρκεια: 80 λεπτά

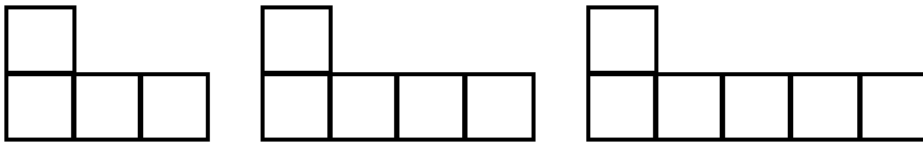
Δραστηριότητες Αξιολόγησης

1. Να βάλετε σε κύκλο όσο από τα πιο κάτω είναι μοτίβα. Να εξηγήσετε.

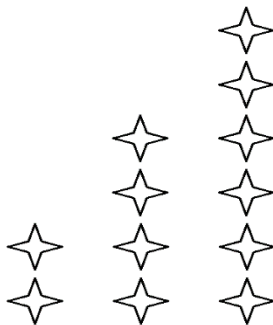
α. 0, 2, 4, 7, 9, 11, 13, ...

β. 3, 6, 12, 24, 48, 96, ...

γ.



δ.



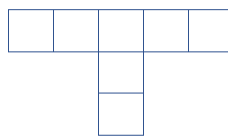
2. Η Ζωή δημιούργησε το ακόλουθο μοτίβο

α. Πόσα τετράγωνα θα έχει το Σχήμα 4;

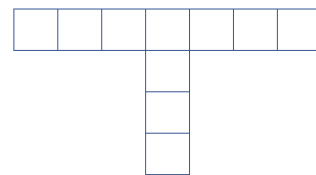
β. Πόσα περισσότερα τετράγωνα θα έχει κάθε επόμενο σχήμα;



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

3. Ένα μοτίβο αρχίζει με τον αριθμό 5 και προσθέτει 4. Ποιοι είναι οι πρώτοι πέντε όροι αυτού του μοτίβου;

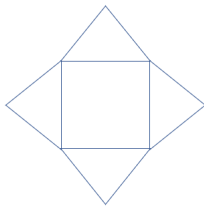
4. Να ακολουθήσετε τις οδηγίες για να ολοκληρώσετε το παρακάτω μοτίβο.
"Το πρώτο σας βήμα είναι να ξεκινήσετε με τον αριθμό 1. Το δεύτερο σας βήμα είναι να προσθέσετε 3. Στη συνέχεια, θα προσθέσετε 3 σε κάθε όρο για να φτάσετε στον επόμενο όρο".

- α. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

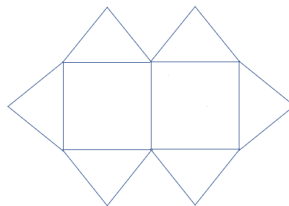
Αριθμός Βήματος	Αριθμός Μοτίβου
1	1
2	
3	
4	
5	

- β. Να δημιουργήσετε μια γραφική παράσταση (χρησιμοποιώντας χαρτί πλέγματος ή λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας) με βάση τον παραπάνω πίνακα χρησιμοποιώντας ως σημεία συντεταγμένων τον αριθμό βήματος και τον αριθμό του μοτίβου.
γ. Να χρησιμοποιήσετε τη γραφική παράσταση για να βρείτε τον αριθμό του μοτίβου στο Βήμα 12.

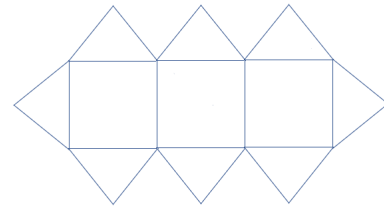
5. Ο Γιάννης κατασκεύασε το ακόλουθο μοτίβο.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

- α. Πόσα τρίγωνα θα έχει το Σχήμα 12;
β. Πόσα τρίγωνα θα έχει το Σχήμα n ;

Ψηφιακά Εργαλεία:

Εξερεύνηση 1:

<https://www.youtube.com/watch?v=t179ZcUdCOA&t=241s>

Εξερεύνηση 2:

<https://www.geogebra.org/m/dx2smkae>



Δραστηριότητα 1:

<https://www.geogebra.org/m/z3cc23rf>



Δραστηριότητα 2:

<https://www.geogebra.org/m/nmma8wra>



Δραστηριότητα 4:

<https://apps.mathlearningcenter.org/pattern-shapes/>

