Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

# Funktionales Denken von Schülerinnen und Schülern fördern – Spezifische Lernumgebungen erkunden und (weiter-)entwickeln

1. Sitzung:

Organisatorisches; Vorerfahrungen

Ute Sproesser
Kerstin Frey

# Agenda: 1. Veranstaltung

- **Organisation**
- **Fragebogen**

# Kurze Vorstellungsrunde

**Bitte erzählen Sie kurz etwas über sich!**

- Name
- Studiengang
- Erfahrungen mit Funktionen (eigene Schulzeit, Studium, Schulpraxis)
- Erwartungen, Wünsche, Ängste
- …

# Fragebogen

# Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und bis zum nächsten Mal!

# Funktionales Denken von Schülerinnen und Schülern fördern – Spezifische Lernumgebungen erkunden und (weiter-)entwickeln

2. Sitzung:
Aufgabenlösungen reflektieren

Ute Sproesser
Kerstin Frey

# Agenda: 2. Veranstaltung

- **Schüleraufgaben zum funktionalen Denken lösen & reflektieren**

**Lernziele:**

- Ausgewählte Schüleraufgaben zum funktionalen Denken lösen können.
- Verschiedene Lösungsstrategien erkennen und vergleichen.
- Didaktische Ziele in Bezug auf die verwendeten Aufgaben (ggfs. in verschiedenen Jahrgangsstufen) evaluieren.
- Sich über mögliche Schwierigkeiten, Fehler und Fehlvorstellungen bewusst werden.
- Kriterien zur Einordnung von Aufgaben entwickeln, anwenden & reflektieren.

# Schüleraufgaben zum funktionalen Denken

## Lösen und Reflektieren von Schüleraufgaben

**Aktivitäten:**

1. Einzelarbeit: Lösen Sie die Schüleraufgaben auf dem Arbeitsblatt. Versuchen Sie, verschiedene Lösungsansätze zu nutzen.

**Austausch in Tandems / Kleingruppen – Gemeinsame Diskussion, z.B. zu …**

- Korrektheit
- Verschiedene Lösungen / Strategien
- Lernziele: Welches Vorwissen / welche Fähigkeiten werden gebraucht & geschult?
- Knifflige Aufgaben / Erwartete Schwierigkeiten / Fehler / Fehlvorstellungen

# Schüleraufgaben zum funktionalen Denken

## Lösen und Reflektieren von Schüleraufgaben

**Aktivitäten:**

1. Einzelarbeit: Lösen Sie die Schüleraufgaben auf dem Arbeitsblatt. Versuchen Sie, verschiedene Lösungsansätze zu nutzen.
2. Partnerarbeit: Sortieren Sie die Aufgaben nach Ihren eigenen Kriterien. Begründen Sie die Kriterien und Zuordnung.

## Vorstellung & gemeinsame Diskussion

- Kriterien
- Zuordnung

# Zusammenfassung: 2. Veranstaltung

- **Schüleraufgaben zum funktionalen Denken lösen & reflektieren**

**Lernziele:**

- Ausgewählte Schüleraufgaben zum funktionalen Denken lösen können.
- Verschiedene Lösungsstrategien erkennen und vergleichen.
- Didaktische Ziele in Bezug auf die verwendeten Aufgaben (ggfs. in verschiedenen Jahrgangsstufen) evaluieren.
- Sich über mögliche Schwierigkeiten, Fehler und Fehlvorstellungen bewusst werden

# Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und bis zum nächsten Mal!

# Funktionales Denken von Schülerinnen und Schülern fördern – Spezifische Lernumgebungen erkunden und (weiter-)entwickeln

3. Sitzung:

Grundvorstellungen & Darstellungen

Ute Sproesser
Kerstin Frey

# Agenda: 3. Veranstaltung

- **Funktionen: Grundvorstellungen und Darstellungen**

**Lernziele:**

- Unterschiedliche Darstellungen von Funktionen kennen und wissen, wie Darstellungswechsel erfolgen bzw. gefördert werden können.
- Die Grundvorstellungen zu Funktionen kennen.
- Verstehen, wie sich die Grundvorstellungen zu Funktionen in verschiedenen Darstellungen zeigen.
- In der Lage sein, Aufgaben auf unterschiedliche Weise unter Verwendung verschiedener Funktionsdarstellungen und Grundvorstellungen zu lösen.

# Grundvorstellungen und Darstellungen

## Schüleraufgabe vergleichbar zu Realschulabschlussprüfung BW

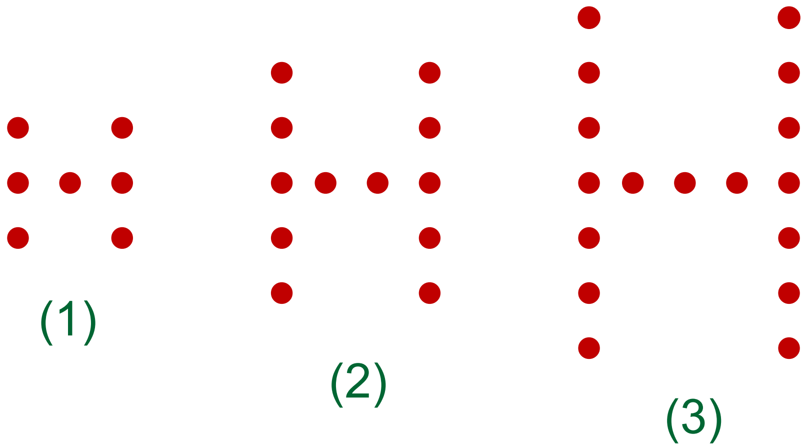
Emil hat die ersten drei Muster aus Plättchen gelegt.

a) Wie viele Plättchen werden für das 5. Muster benötigt?

b) Eine der abgedruckten Formeln kann zur Berechnung der Plättchenanzahl bei allen Mustern verwendet werden. Kreuze diese Formel an!

☐ $s = n + 6$
☐ $s = 5n + 2$
☐ $s = 3n + 4$

→n gibt die Stelle des jeweiligen Musters an
→s gibt die Summe der benötigten Plättchen eines Musters an




Angelehnt an eine Aufgabe der Realschul-Abschlussprüfung

**Aktivität auf AB:**

Bitte bearbeiten Sie diese Aufgabe. Machen Sie sich Notizen zu den genutzten Strategien.

# Grundvorstellungen und Darstellungen

## Schüleraufgabe aus PISA-Studie

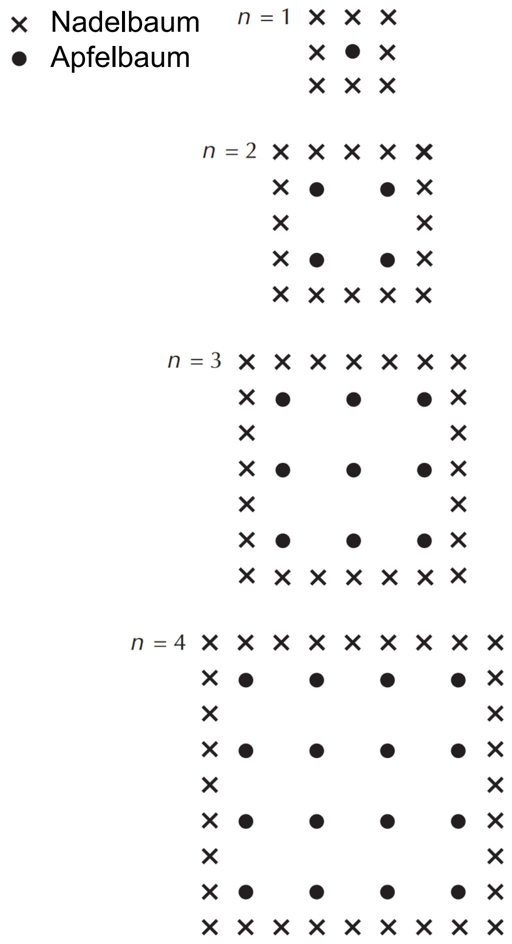
Ein Bauer pflanzt Apfelbäume in einem quadratischen Muster. Um die Bäume gegen Wind zu schützen, setzt er Nadelbäume um den ganzen Obstgarten herum.

Nebenstehend ist die Situation abgebildet mit dem Muster der Apfel- und Nadelbäume für verschiedene Anzahlen (n) an Reihen von Apfelbäumen.

Wann ist die Anzahl der Nadelbäume genauso groß wie die Anzahl der Apfelbäume?

**Aktivität auf AB:**

Bitte bearbeiten Sie diese Aufgabe. Machen Sie sich Notizen zu den genutzten Strategien.




(Aufgabe übersetzt von OECD, 2009, S. 102)

# Grundvorstellungen und Darstellungen

## Schüleraufgabe aus Online-Assessment

Gegeben ist die folgende Situation:

Eine Kerze ist zu Beginn 24 cm hoch und wird pro Stunde um 2 cm kürzer.

Stelle eine Funktionsgleichung auf, die diese Situation angemessen beschreibt!

(Aufgabe adaptiert von R. Nitsch: www.codi-test.de)

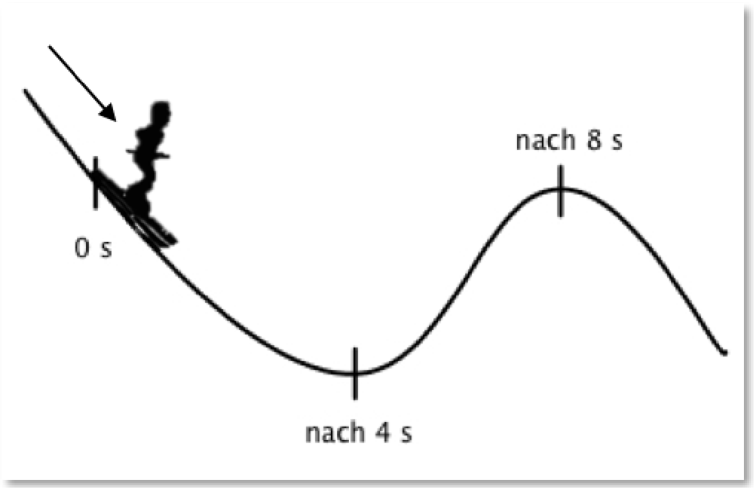
**Aktivität auf AB:**

Bitte bearbeiten Sie diese Aufgabe. Machen Sie sich Notizen zu den genutzten Strategien.

# Grundvorstellungen und Darstellungen

**Aktivität (Murmelphase):**

Was müssen SchülerInnen können und wissen, um diese Aufgabe zu bearbeiten?




(vgl. Barzel & Ruchniewicz, 2020, S. 9f)

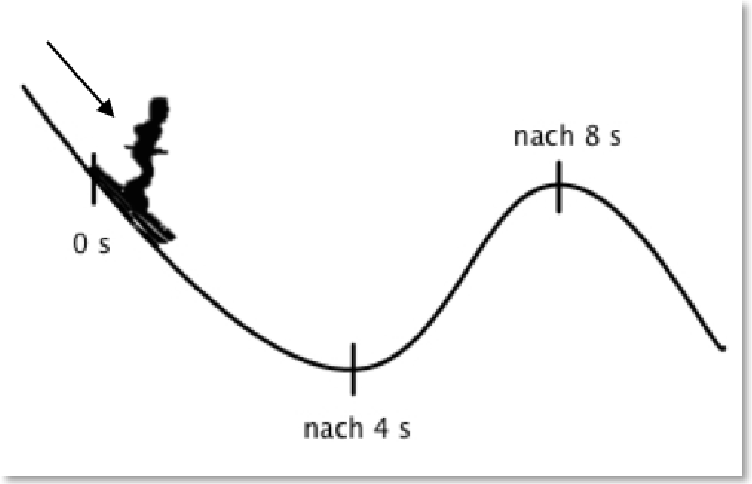
Ein Skifahrer hat zum Zeitpunkt 0 Sekunden schon eine Anfangsgeschwindigkeit und lässt sich dann den Berg hinuntergleiten (ohne absichtlich zu bremsen).

- Wann ist er schneller: bei Sekunde 4 oder 8?
- Beschreibe in Worten, wie sich seine Geschwindigkeit mit der Zeit verändert.
- Eine Skifahrerin fährt die gleiche Strecke und hat eine höhere Anfangsgeschwindigkeit als der Skifahrer. Vergleiche die beiden Fahrten in Worten.

# Grundvorstellungen und Darstellungen

Die SchülerInnen müssen funktionale Zusammenhänge in unterschiedlichen Darstellungen beschreiben & interpretieren sowie diese **Darstellungen** vernetzen & wechseln.

Die SchülerInnen müssen über **Grundvorstellungen** zu funktionalen Zusammenhängen verfügen.




(vgl. Barzel & Ruchniewicz, 2020, S. 9f)

Ein Skifahrer hat zum Zeitpunkt 0 Sekunden schon eine Anfangsgeschwindigkeit und lässt sich dann den Berg hinuntergleiten (ohne absichtlich zu bremsen).

- Wann ist er schneller: bei Sekunde 4 oder 8?
- Beschreibe in Worten, wie sich seine Geschwindigkeit mit der Zeit verändert.
- Eine Skifahrerin fährt die gleiche Strecke und hat eine höhere Anfangsgeschwindigkeit als der Skifahrer. Vergleiche die beiden Fahrten in Worten.

# Grundvorstellungen und Darstellungen

Die SchülerInnen müssen funktionale Zusammenhänge in unterschiedlichen Darstellungen beschreiben & interpretieren sowie diese **Darstellungen** vernetzen & wechseln.

Die SchülerInnen müssen über **Grundvorstellungen** zu funktionalen Zusammenhängen verfügen.

**Bedeutung von Darstellungen**
(z.B. Pittalis et al., 2020; Hußmann & Laakman, 2011)

- **Zugang zum mathematischen Objekt**
- **Begriffsbildung**
- **Problemlösen**

→Verstehen, Vernetzen, Wechseln der Darstellungen

**Typische Darstellungen:**
Graphen, Gleichungen, Tabellen, Beschreibungen und Abbildungen von Situationen

**Grundvorstellungen / Aspekte: Funktionen unter verschiedenen Perspektiven wahrnehmen**
(z.B. Malle, 2000; Pittalis et al., 2020; Vollrath, 1989)

- Input-Output-Vorstellung
- Zuordnungsvorstellung
- Kovariationsvorstellung
- Objekt-Vorstellung

# Grundvorstellungen und Darstellungen

**Die Grundvorstellungen**

… zeigen unterschiedliche Perspektiven auf Funktionen

… sind untrennbar mit dem Verständnis der Darstellungen verwoben

… fungieren insbesondere als Brücke zwischen realer Situation und mathematischer Perspektive

**Grundvorstellungen / Aspekte: Funktionen unter verschiedenen Perspektiven wahrnehmen**
(z.B. Malle, 2000; Pittalis et al., 2020; Vollrath, 1989)

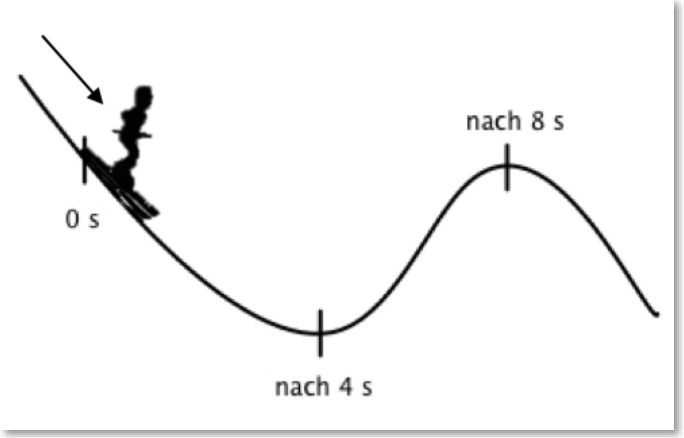
- Input-Output-Vorstellung
- Zuordnungsvorstellung
- Kovariationsvorstellung
- Objekt-Vorstellung

PH Ludwigsburg
University of Education

# Grundvorstellungen und Darstellungen

Grundvorstellung **Zuordnung**

Jedem Wert der ersten Größe wird (genau) ein Wert der zweiten Größe zugeordnet.




(vgl. Barzel & Ruchniewicz, 2020, S. 9f)

**Mögliche Überlegungen:**

Welche Geschwindigkeit hat er nach 4 bzw. nach 8 Sekunden?

Nach 4 Sekunden ist er am schnellsten. Also ist er nach 8 Sekunden langsamer als nach 4 Sekunden.

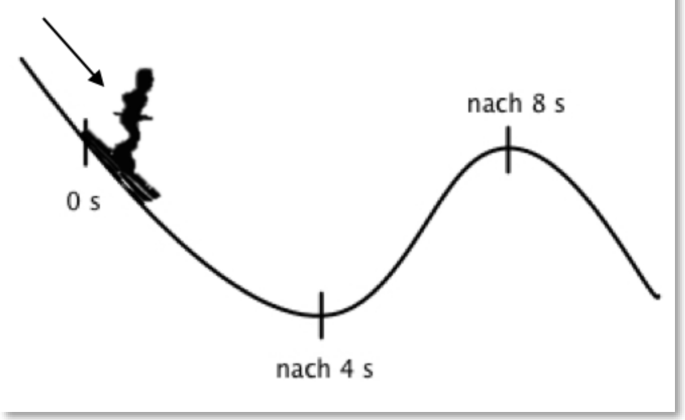
Ein Skifahrer hat zum Zeitpunkt 0 Sekunden schon eine Anfangsgeschwindigkeit und lässt sich dann den Berg hinuntergleiten (ohne absichtlich zu bremsen).

- **Wann ist er schneller: bei Sekunde 4 oder 8?**

# Grundvorstellungen und Darstellungen

Grundvorstellung **Zuordnung**

Jedem Wert der ersten Größe wird (genau) ein Wert der zweiten Größe zugeordnet.




(vgl. Barzel & Ruchniewicz, 2020, S. 9f)

| **Zeit** (in Sekunden) | **Geschwindigkeit** (in km/h) |
|---|---|
| 0 | 20 |
| 4 | 50 |
| 8 | 20 |
| 12 | 40 |

Zuordnung

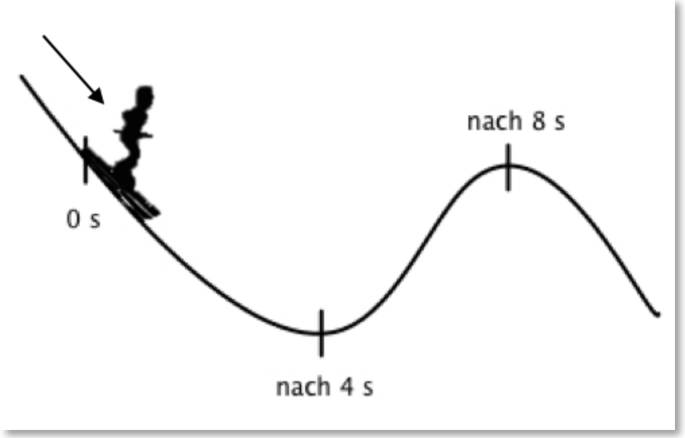
Ein Skifahrer hat zum Zeitpunkt 0 Sekunden schon eine Anfangsgeschwindigkeit und lässt sich dann den Berg hinuntergleiten (ohne absichtlich zu bremsen).

- **Wann ist er schneller: bei Sekunde 4 oder 8?**

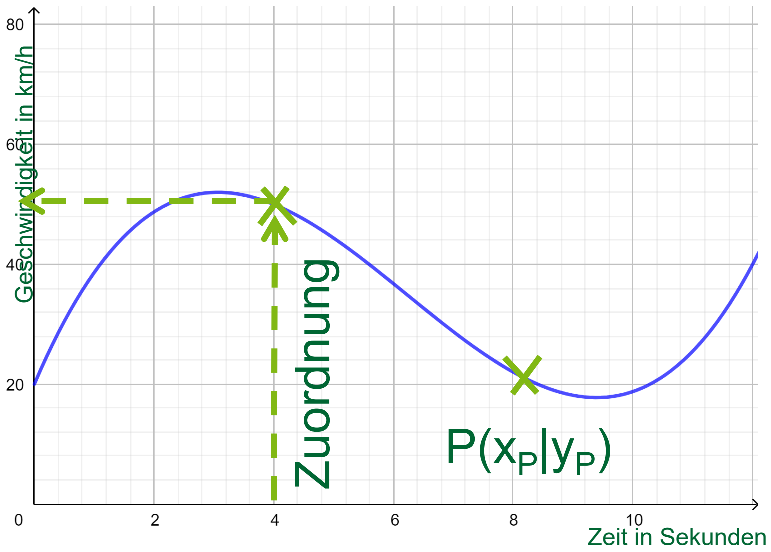
# Grundvorstellungen und Darstellungen

**Grundvorstellung Zuordnung**

Jedem Wert der ersten Größe wird (genau) ein Wert der zweiten Größe zugeordnet.




(vgl. Barzel & Ruchniewicz, 2020, S. 9f)




Ein Skifahrer hat zum Zeitpunkt 0 Sekunden schon eine Anfangsgeschwindigkeit und lässt sich dann den Berg hinuntergleiten (ohne absichtlich zu bremsen).

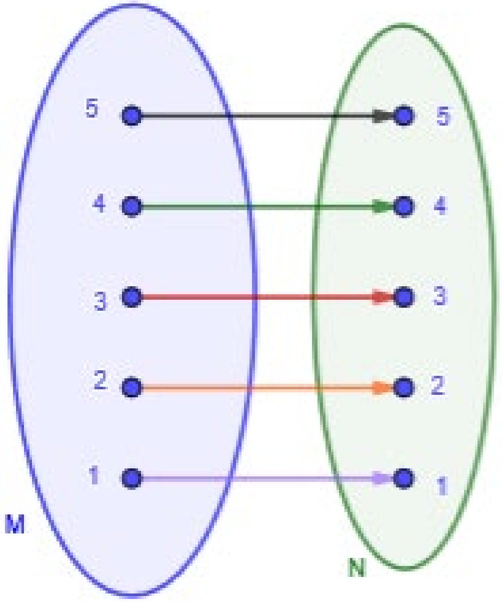
- **Wann ist er schneller: bei Sekunde 4 oder 8?**

# Grundvorstellungen und Darstellungen

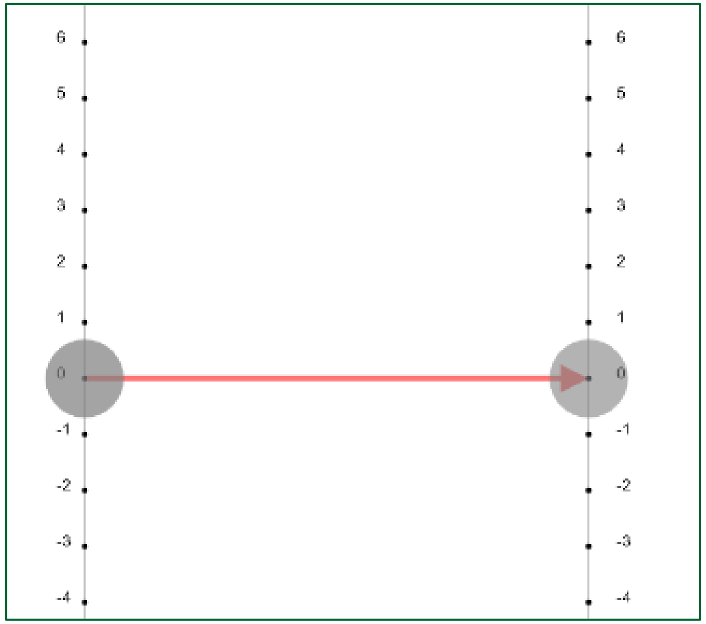
Grundvorstellung **Zuordnung**

Jedem Wert der ersten Größe wird (genau) ein Wert der zweiten Größe zugeordnet.

Wie sieht die Zuordnungsvorstellung in Bezug auf eine **Gleichung** aus? Erläutern Sie die Zuordnungsvorstellung auch in Bezug auf das **Pfeildiagramm** und das **Nomogramm**!




Pfeildiagramm

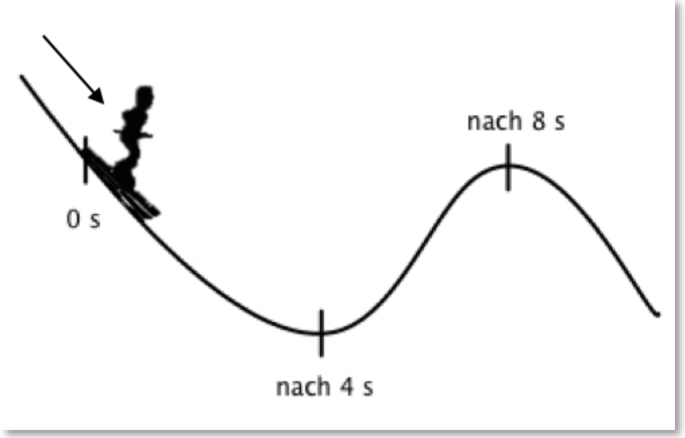



Nomogramm

# Grundvorstellungen und Darstellungen

Grundvorstellung **Kovariation**

Wie hängen Veränderungen der ersten Größe mit Veränderungen der zweiten Größe zusammen?




(vgl. Barzel & Ruchniewicz, 2020, S. 9f)

**Mögliche Überlegungen:**

**Variation:**
Zeit schreitet voran

**Kovariation:**
Geschwindigkeit wird zwischen 0 und 4 Sek. größer, zwischen 4 und 8 Sek. geringer, ab 8 Sek. dann wieder höher…

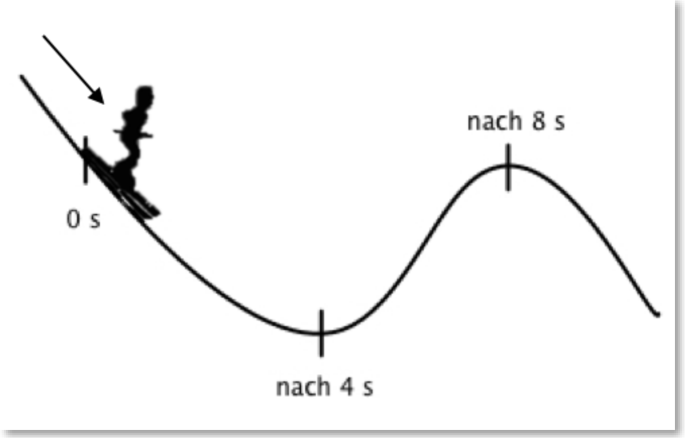
Ein Skifahrer hat zum Zeitpunkt 0 Sekunden schon eine Anfangsgeschwindigkeit und lässt sich dann den Berg hinuntergleiten (ohne absichtlich zu bremsen).

- **Beschreibe in Worten, wie sich seine Geschwindigkeit mit der Zeit verändert.**

# Grundvorstellungen und Darstellungen

**Grundvorstellung Kovariation**

Wie hängen Veränderungen der ersten Größe mit Veränderungen der zweiten Größe zusammen?




(vgl. Barzel & Ruchniewicz, 2020, S. 9f)

| Zeit (in Sekunden) | Geschwindigkeit (in km/h) |
|---|---|
| 0 | 20 |
| 4 | 50 |
| 8 | 20 |
| 12 | 40 |

Variation

Kovariation

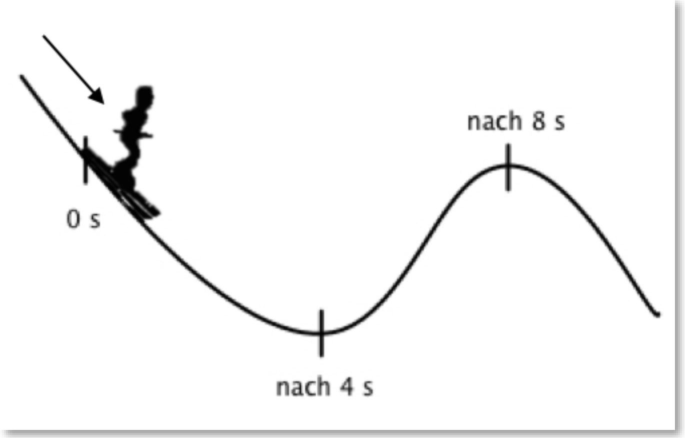
Ein Skifahrer hat zum Zeitpunkt 0 Sekunden schon eine Anfangsgeschwindigkeit und lässt sich dann den Berg hinuntergleiten (ohne absichtlich zu bremsen).

- **Beschreibe in Worten, wie sich seine Geschwindigkeit mit der Zeit verändert.**

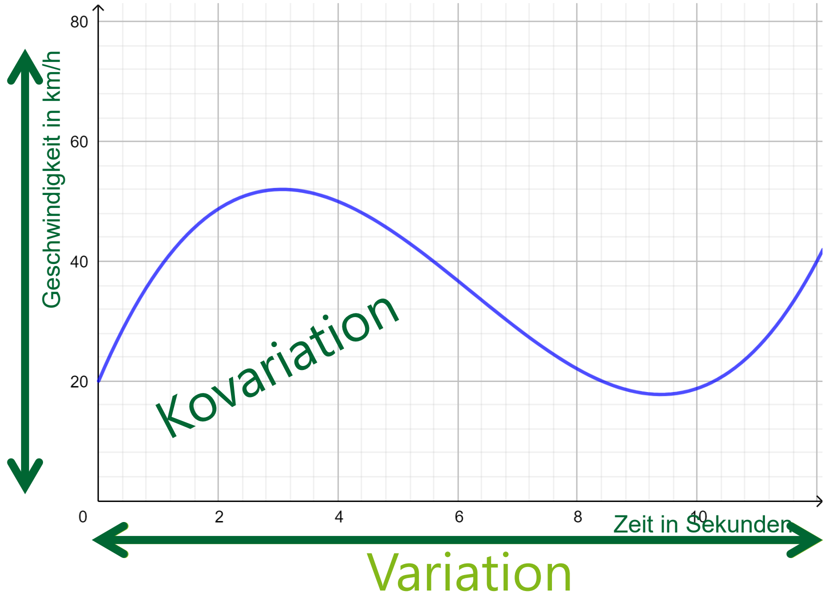
# Grundvorstellungen und Darstellungen

Grundvorstellung **Kovariation**

Wie hängen Veränderungen der ersten Größe mit Veränderungen der zweiten Größe zusammen?




(vgl. Barzel & Ruchniewicz, 2020, S. 9f)




Ein Skifahrer hat zum Zeitpunkt 0 Sekunden schon eine Anfangsgeschwindigkeit und lässt sich dann den Berg hinuntergleiten (ohne absichtlich zu bremsen).

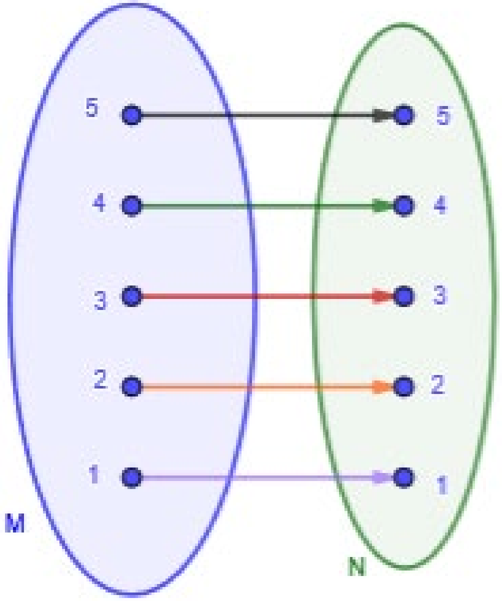
- **Beschreibe in Worten, wie sich seine Geschwindigkeit mit der Zeit verändert.**

# Grundvorstellungen und Darstellungen

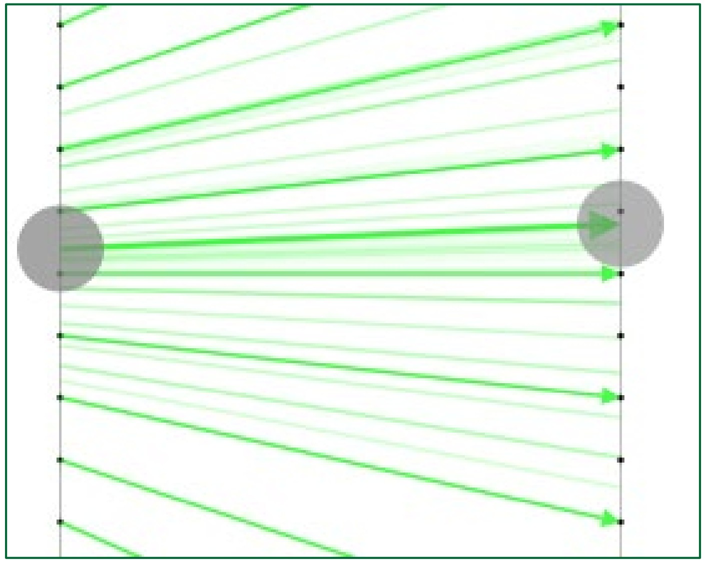
Grundvorstellung **Kovariation**

Wie hängen Veränderungen der ersten Größe mit Veränderungen der zweiten Größe zusammen?

Wie sieht die Kovariationsvorstellung in Bezug auf eine **Gleichung** aus? Erläutern Sie die Kovariationsvorstellung auch in Bezug auf das **Pfeildiagramm** und das **Nomogramm**!




Pfeildiagramm



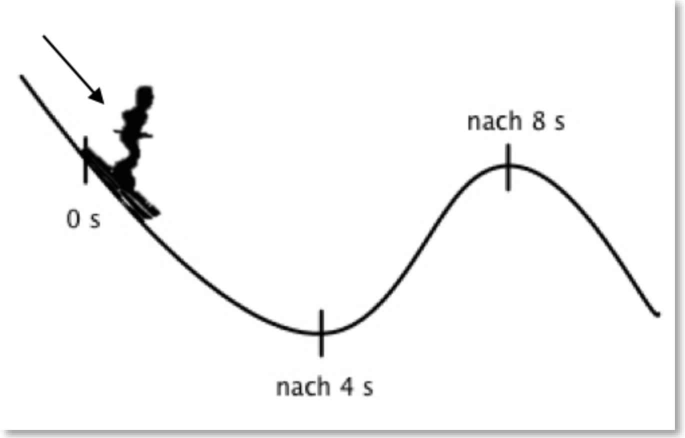
Nomogramm

PH Ludwigsburg University of Education

# Grundvorstellungen und Darstellungen

Grundvorstellung **Funktion als Ganzes / Objekt**

Betrachtung der Gesamtheit der Wertepaare bzw. der Funktion als mathematisches Objekt.




(vgl. Barzel & Ruchniewicz, 2020, S. 9f)

**Mögliche Überlegungen:**

Vermutlich hat sie im gesamten Streckenverlauf eine höhere Geschwindigkeit.

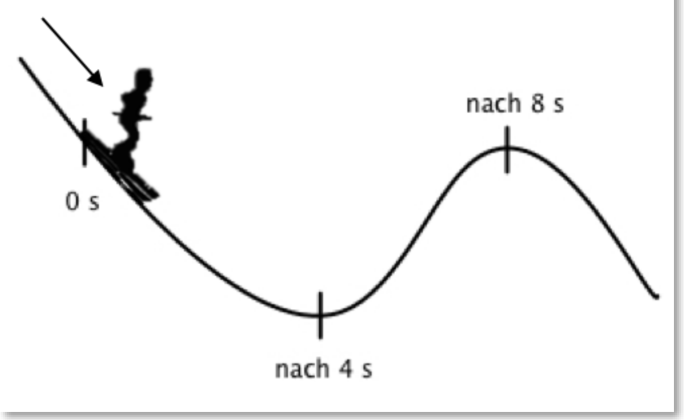
Ein Skifahrer hat zum Zeitpunkt 0 Sekunden schon eine Anfangsgeschwindigkeit und lässt sich dann den Berg hinuntergleiten (ohne absichtlich zu bremsen).

- **Eine Skifahrerin fährt die gleiche Strecke und hat eine höhere Anfangsgeschwindigkeit als der Skifahrer. Vergleiche die beiden Fahrten in Worten.**

# Grundvorstellungen und Darstellungen

**Grundvorstellung Funktion als Ganzes / Objekt**

Betrachtung der Gesamtheit der Wertepaare bzw. der Funktion als mathematisches Objekt.




(vgl. Barzel & Ruchniewicz, 2020, S. 9f)

| **Zeit** (in Sekunden) | **Skifahrer Geschwindigkeit** (in km/h) | **Skifahrerin Geschwindigkeit** (in km/h) |
|---|---|---|
| 0 | 20 | … |
| 4 | 50 | … |
| 8 | 20 | … |
| 12 | 40 | … |

Funktion als Ganzes

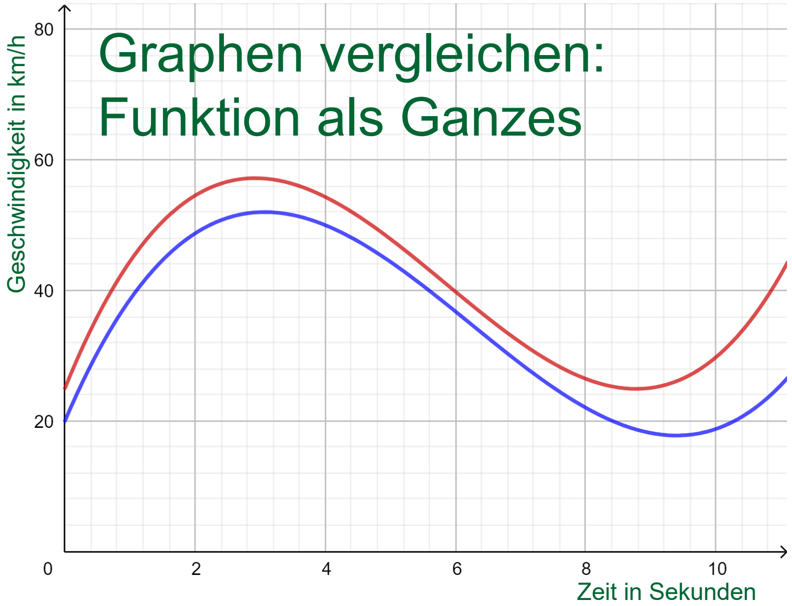
Ein Skifahrer hat zum Zeitpunkt 0 Sekunden schon eine Anfangsgeschwindigkeit und lässt sich dann den Berg hinuntergleiten (ohne absichtlich zu bremsen).

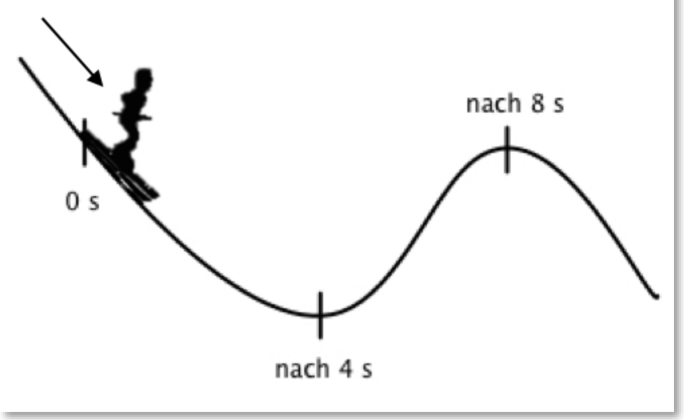
- **Eine Skifahrerin fährt die gleiche Strecke und hat eine höhere Anfangsgeschwindigkeit als der Skifahrer. Vergleiche die beiden Fahrten in Worten.**

# Grundvorstellungen und Darstellungen

Grundvorstellung **Funktion als Ganzes / Objekt**

Betrachtung der Gesamtheit der Wertepaare bzw. der Funktion als mathematisches Objekt.




(vgl. Barzel & Ruchniewicz, 2020, S. 9f)

Ein Skifahrer hat zum Zeitpunkt 0 Sekunden schon eine Anfangsgeschwindigkeit und lässt sich dann den Berg hinuntergleiten (ohne absichtlich zu bremsen).

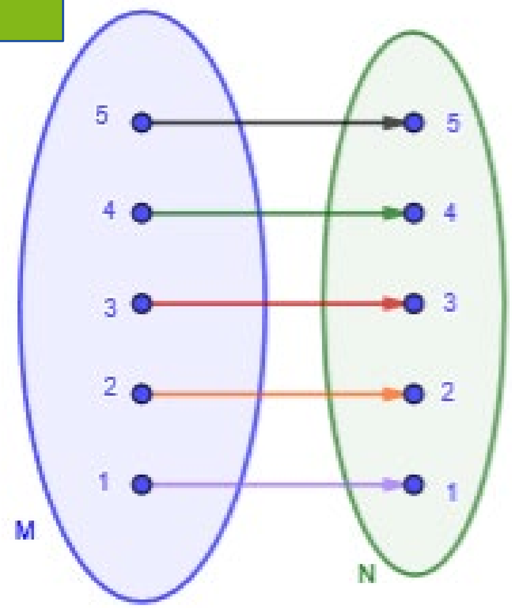
- **Eine Skifahrerin fährt die gleiche Strecke und hat eine höhere Anfangsgeschwindigkeit als der Skifahrer. Vergleiche die beiden Fahrten in Worten.**

# Grundvorstellungen und Darstellungen

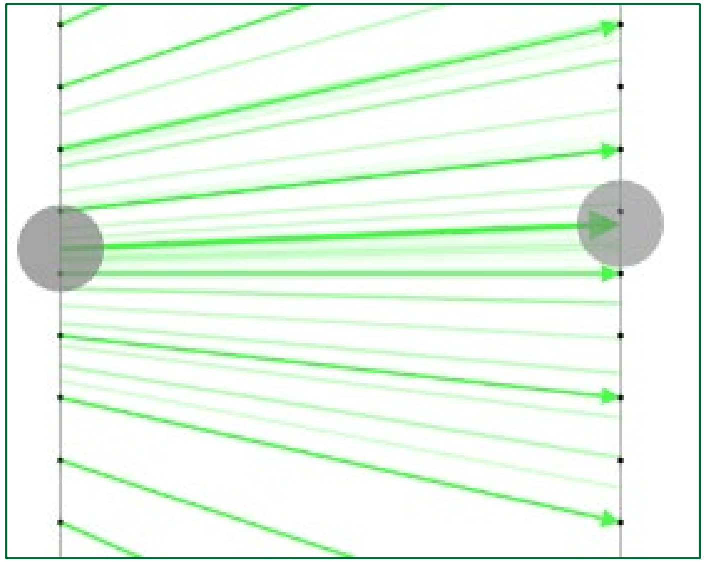
Grundvorstellung **Funktion als Ganzes / Objekt**

Betrachtung der Gesamtheit der Wertepaare bzw. der Funktion als mathematisches Objekt.

Wie sieht die Objektvorstellung in Bezug auf eine **Gleichung** aus? Erläutern Sie die Objektvorstellung auch in Bezug auf das **Pfeildiagramm** und das **Nomogramm**!




Pfeildiagramm



Nomogramm

# Grundvorstellungen und Darstellungen

Grundvorstellung **Input-Output**

Eine gegebene Regel auf einen Input-Wert anwenden, sodass sich ein bestimmter Output-Wert ergibt bzw. zu gegebenen Input- und Output-Werten die Transformationsregel finden.

# Grundvorstellungen und Darstellungen

Grundvorstellung **Input-Output**

Eine gegebene Regel auf einen Input-Wert anwenden, sodass sich ein bestimmter Output-Wert ergibt bzw. zu gegebenen Input- und Output-Werten die Transformationsregel finden.

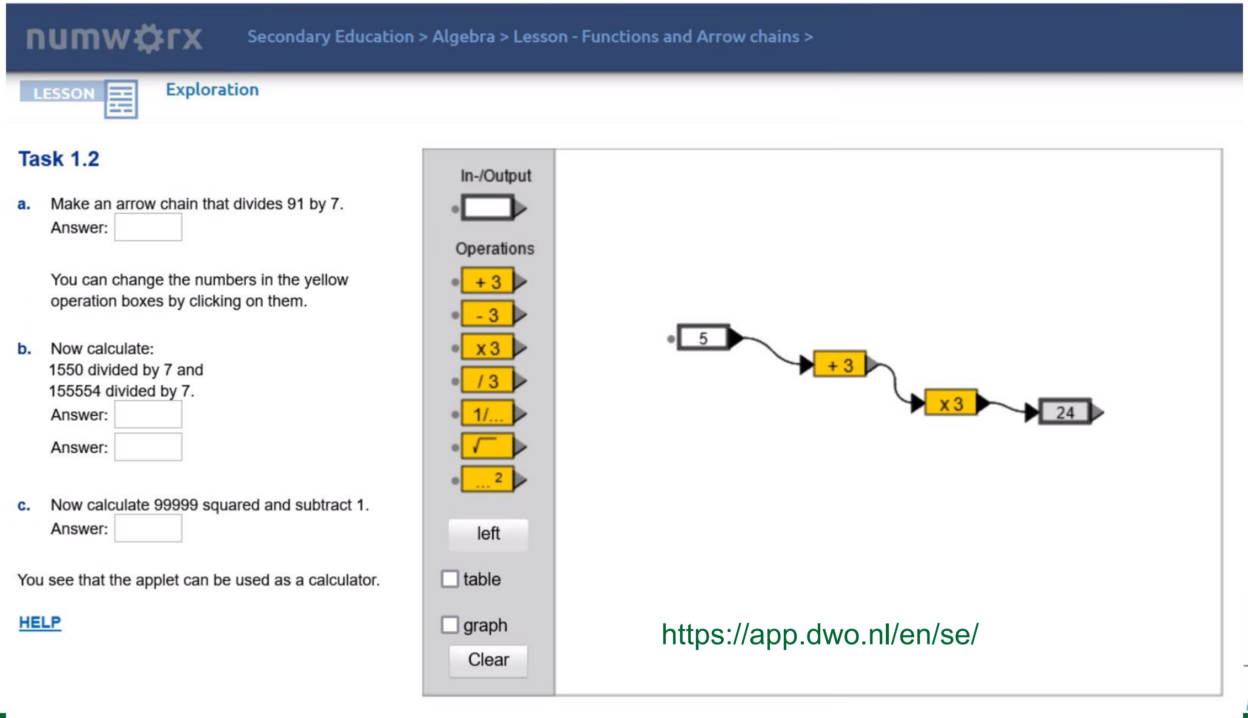
Wie zeigt sich die Input-Output-Vorstellung in Bezug auf folgende Darstellungen:

- Situativ
- Tabellarisch
- Graphisch
- Algebraisch / Gleichung
- Pfeildiagramm
- Nomogramm

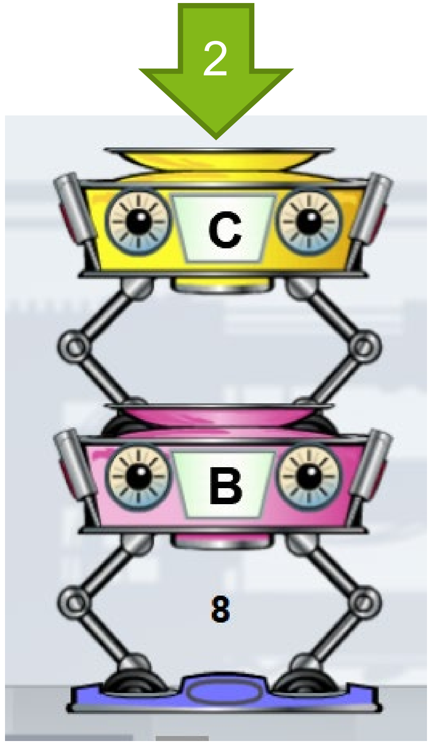
# Grundvorstellungen und Darstellungen

## Grundvorstellung **Input-Output**

Eine gegebene Regel auf einen Input-Wert anwenden, sodass sich ein bestimmter Output-Wert ergibt bzw. zu gegebenen Input- und Output-Werten die Transformationsregel finden.




https://app.dwo.nl/en/se/




**Left Stand**

| Input | Output |
|---|---|
| 4 | 10 |
| 0 | 6 |
| 6 | 12 |
| 7 | 13 |
| 2 | 8 |

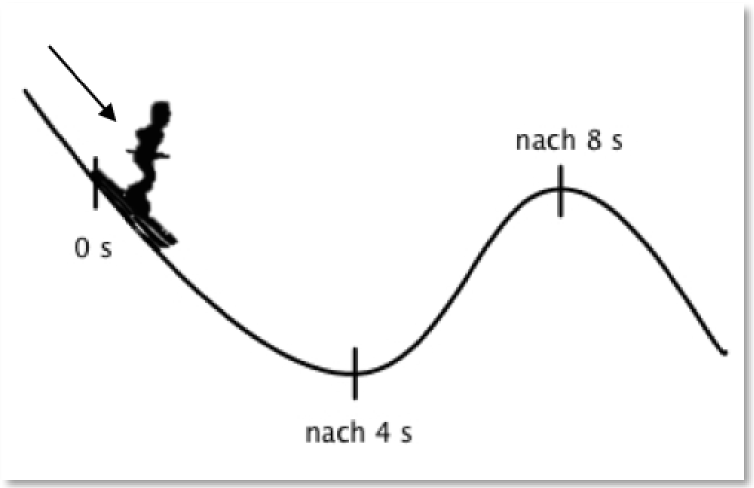
https://gizmos.explorelearning.com/index.cfm?method=cResource.dspView&ResourceID=1035

funThink
Enhancing functional thinking from primary to upper secondary school

# Grundvorstellungen und Darstellungen

**Aktivität (AB):**

Beurteilen Sie die abgedruckten Schülerlösungen in Hinblick auf die genutzten Darstellungen und Grundvorstellungen!




(vgl. Barzel & Ruchniewicz, 2020, S. 9f)

Bel 8 Sekunden weil er an dem Hügel kein Berg Hoch muss.

Der Skifahrer fährt erst schneller, weil er bergab fährt. Dann wird er langsamer, da es bergauf geht und dann wieder schneller weil es bergab geht.

Bei 0 Sekunden ist er noch schnell aber bei ~~noch~~ 4 Sekunden ist er langsam und bei 8 Sekunden wieder schnell.

ist genau so schnell wie bei der andern fahrt.

# Grundvorstellungen und Darstellungen

## Schüleraufgabe vergleichbar zu Realschulabschlussprüfung BW

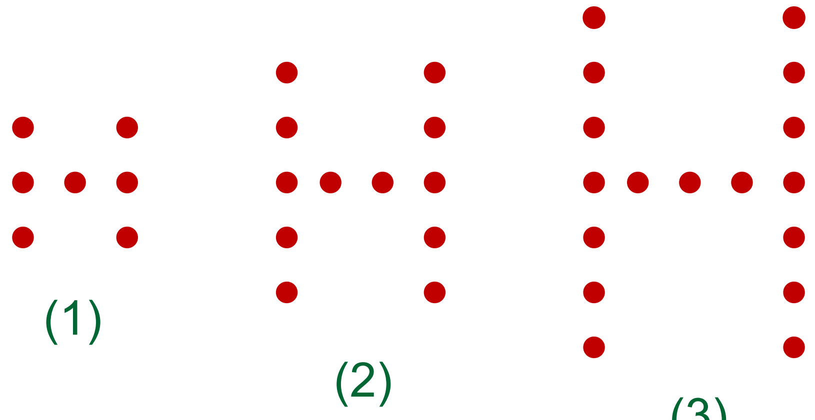
Emil hat die ersten drei Muster aus Plättchen gelegt.

a) Wie viele Plättchen werden für das 5. Muster benötigt?

b) Eine der abgedruckten Formeln kann zur Berechnung der Plättchenanzahl bei allen Mustern verwendet werden. Kreuze diese Formel an!

- ☐ $s = n + 6$
- ☐ $s = 5n + 2$
- ☐ $s = 3n + 4$

→n gibt die Stelle des jeweiligen Musters an
→s gibt die Summe der benötigten Plättchen eines Musters an




Angelehnt an eine Aufgabe der Realschul-Abschlussprüfung

**Besprechung Aktivität:**

Überprüfen Sie Ihre Notizen: Welche Grundvorstellungen und Darstellungen haben Sie genutzt? Erläutern Sie!

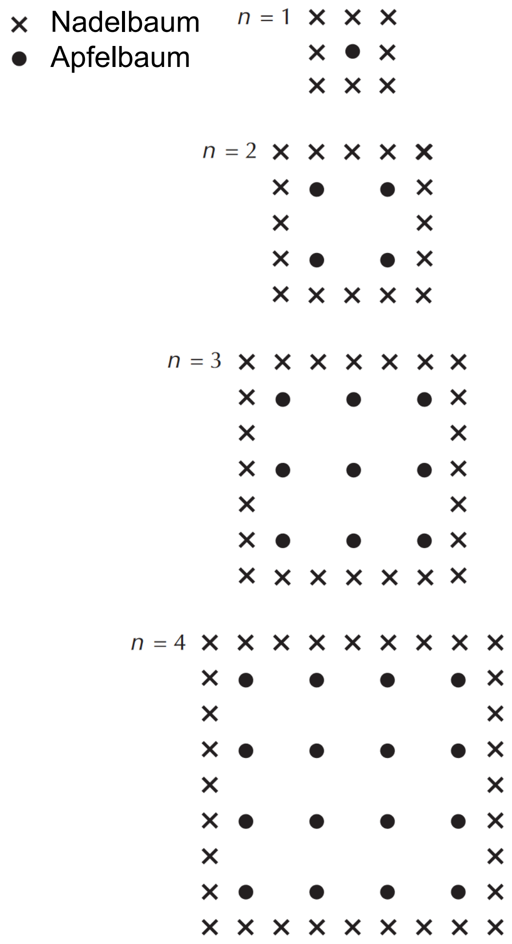
# Grundvorstellungen und Darstellungen

## Schüleraufgabe aus PISA-Studie

Ein Bauer pflanzt Apfelbäume in einem quadratischen Muster. Um die Bäume gegen Wind zu schützen, setzt er Nadelbäume um den ganzen Obstgarten herum.

Nebenstehend ist die Situation abgebildet mit dem Muster der Apfel- und Nadelbäume für verschiedene Anzahlen (n) an Reihen von Apfelbäumen.

Wann ist die Anzahl der Nadelbäume genauso groß wie die Anzahl der Apfelbäume?




(Aufgabe übersetzt von OECD, 2009, S. 102)

**Besprechung Aktivität:**

Überprüfen Sie Ihre Notizen: Welche Grundvorstellungen und Darstellungen haben Sie genutzt? Erläutern Sie!

# Grundvorstellungen und Darstellungen

## Schüleraufgabe aus Online-Assessment

Gegeben ist die folgende Situation:

Eine Kerze ist zu Beginn 24 cm hoch und wird pro Stunde um 2 cm kürzer.

Stelle eine Funktionsgleichung auf, die diese Situation angemessen beschreibt!

(Aufgabe adaptiert von R. Nitsch: www.codi-test.de)

**Besprechung Aktivität:**

Überprüfen Sie Ihre Notizen: Welche Grundvorstellungen und Darstellungen haben Sie genutzt? Erläutern Sie!

# Zusammenfassung: 3. Veranstaltung

- **Funktionen: Grundvorstellungen und Darstellungen**

**Lernziele:**

- Unterschiedliche Darstellungen von Funktionen kennen und wissen, wie Darstellungsänderungen stattfinden/gefördert werden können.
- Die Grundvorstellungen zu Funktionen kennen.
- Verstehen, wie sich die Grundvorstellungen zu Funktionen in verschiedenen Darstellungen zeigen.
- In der Lage sein, Aufgaben auf unterschiedliche Weise unter Verwendung verschiedener Funktionsdarstellungen und Grundvorstellungen zu lösen.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und bis zum nächsten Mal!

# Funktionales Denken von Schülerinnen und Schülern fördern – Spezifische Lernumgebungen erkunden und (weiter-)entwickeln

4. Sitzung:

Funktionales Denken:

Begriffe, Darstellungswechsel, Relevanz

Ute Sproesser
Kerstin Frey

# Agenda: 4. Veranstaltung

- **Funktionales Denken**
  - ➢ Wichtige Begriffe
  - ➢ Darstellungswechsel
  - ➢ Bedeutung

**Lernziele:**

- ➢ Unterschiedliche Darstellungen von Funktionen kennen und wissen, wie Darstellungswechsel stattfinden/gefördert werden können.
- ➢ Den Begriff des funktionalen Denkens kennen, insbesondere die Unterscheidung zwischen Funktion, funktionalem Zusammenhang und funktionalem Denken
- ➢ Die Bedeutung des funktionalen Denkens einschätzen können.

# Grundvorstellungen und Darstellungen

**Aktivität:**

Was verstehen Sie unter den Begriffen „Funktion“, „Funktionaler Zusammenhang“ und „Funktionales Denken“? (Wie) Können diese unterschieden werden?

# Grundvorstellungen und Darstellungen

**Aktivität:**

Was verstehen Sie unter den Begriffen „Funktion“, „Funktionaler Zusammenhang“ und „Funktionales Denken“? (Wie) Können diese unterschieden werden?

„Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung der Elemente einer nicht-leeren Menge A zu den Elementen einer Menge B, geschrieben ***f: A → B***.“
(Büchter & Henn, 2010, S. 18)

Bei vielen inner- und außermathematischen Situationen besteht ein Zusammenhang zwischen zwei Größen in natürlicher Weise oder wird bewusst hergestellt. (…)
Funktionaler Zusammenhang: Wie verhält sich eine Größe in Abhängigkeit der anderen.
(Wittmann, 2007, S. 1ff)

# Grundvorstellungen und Darstellungen

**Aktivität:**

Was verstehen Sie unter den Begriffen „Funktion“, „Funktionaler Zusammenhang“ und „Funktionales Denken“? (Wie) Können diese unterschieden werden?

**Funktionales Denken** als Denken in Zusammenhängen, Abhängigkeiten und Veränderungen.
(Vollrath, 1989)

Über Mathematik hinaus bedeutsam für andere Disziplinen und im Alltag

# Grundvorstellungen und Darstellungen

**Aktivität:**

Was verstehen Sie unter den Begriffen „Funktion“, „Funktionaler Zusammenhang“ und „Funktionales Denken“? (Wie) Können diese unterschieden werden?

Funktionales Denken als Erkennen, Verallgemeinern und Abstrahieren von Zusammenhängen zwischen ko-variierenden Mengen, sowie als **Darstellen und Nutzen dieser Zusammenhänge beim Problemlösen.**
(Pittalis et al., 2020)

**Funktionales Denken** als Denken in Zusammenhängen, Abhängigkeiten und Veränderungen.
(Vollrath, 1989)

Besondere Bedeutung …
- Darstellungen nutzen & verknüpfen
- Grundvorstellungen entwickeln, um vielfältige Probleme zu lösen

# Grundvorstellungen und Darstellungen

**Aktivität:**

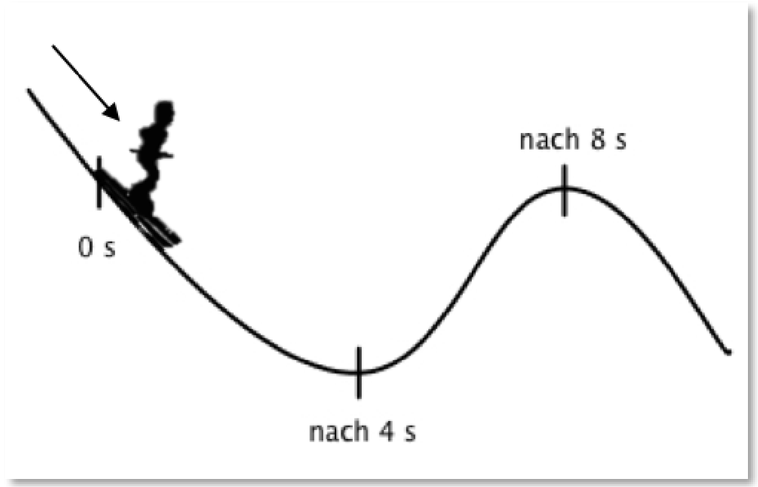
Was verstehen Sie unter den Begriffen „Funktion“, „Funktionaler Zusammenhang“ und „Funktionales Denken“? (Wie) Können diese unterschieden werden?

**Funktionales Denken** als Denken in Zusammenhängen, Abhängigkeiten und Veränderungen.
(Vollrath, 1989)

Funktionales Denken als Erkennen, Verallgemeinern und Abstrahieren von Zusammenhängen zwischen ko-variierenden Mengen, sowie als **Darstellen und Nutzen dieser Zusammenhänge beim Problemlösen.**
(Pittalis et al., 2020)

**„Funktionales Denken ist ein Denken, das typisch für den Umgang mit Funktionen ist.“**
(Vollrath, 1989, S. 6)

# Darstellungsverknüpfung und -wechsel



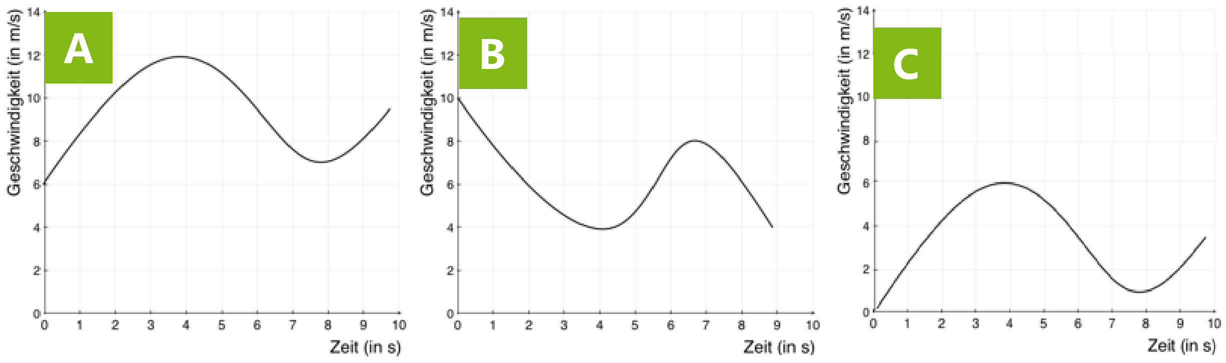

(vgl. Barzel & Ruchniewicz, 2020, S. 9f)

**Aktivität:**

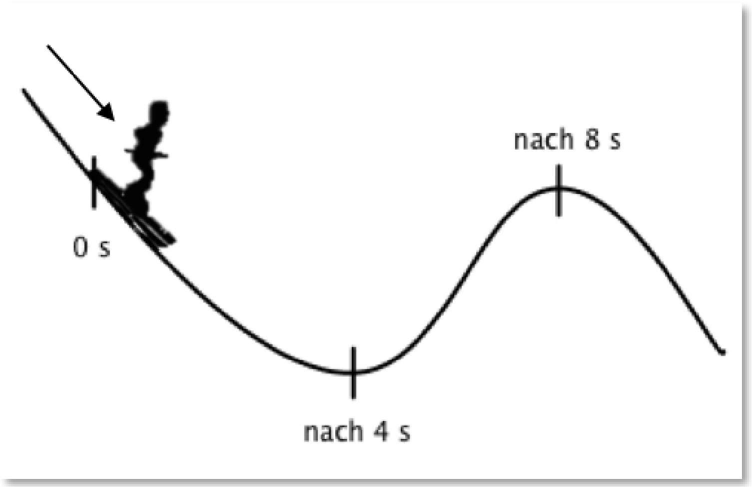
Wie hoch schätzen Sie die Lösungshäufigkeit dieser Aufgabe ein?

Welche Schülerschwierigkeiten und Unterstützungsmöglichkeiten sehen Sie?

Ein Skifahrer hat zum Zeitpunkt 0 Sekunden schon eine Anfangsgeschwindigkeit und lässt sich dann den Berg hinuntergleiten (ohne absichtlich zu bremsen). Welches der drei Diagramme beschreibt, wie sich seine Geschwindigkeit bei der Skifahrt abhängig von der Zeit verändert?



# Darstellungsverknüpfung und -wechsel




(vgl. Barzel & Ruchniewicz, 2020, S. 9f)

**Aktivität:**

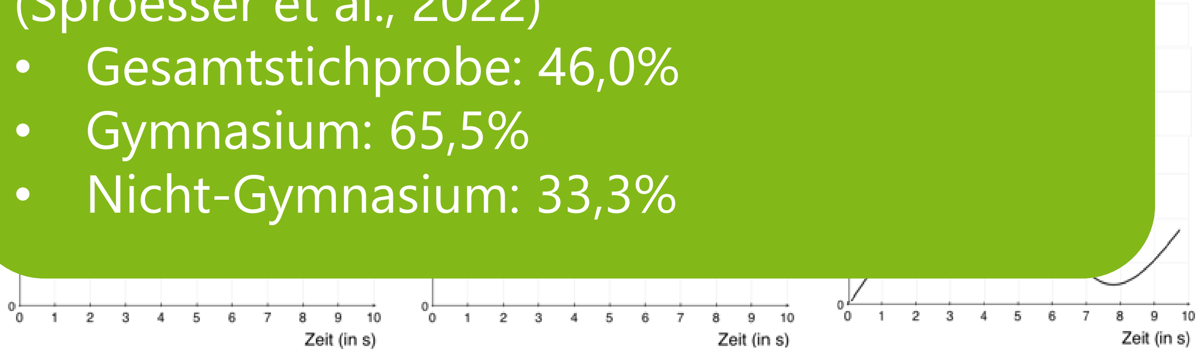
Wie hoch schätzen Sie die **Lösungshäufigkeit** dieser Aufgabe ein?

Welche Schülersc[hwierigkeiten] und Unterstützungsm[ögli]chkeiten sehen Sie?

Ein Skifahrer hat zum Zeitpunkt 0 Sekunden schon eine Anfangsgeschwindigkeit und lässt sich dann den Berg hinuntergleiten (ohne absichtlich zu bremsen). Welches der drei Diagramme beschreibt, wie sich seine Geschwindigkeit bei der Skifahrt abhängig von der Zeit verändert?

**Lösungshäufigkeit unter 856 Lernenden**
(Sproesser et al., 2022)

- Gesamtstichprobe: 46,0%
- Gymnasium: 65,5%
- Nicht-Gymnasium: 33,3%



# Darstellungsverknüpfung und -wechsel


(Ruchniewicz, 2020, S. 9f)

**Aktivität:**

Wie hoch schätzen Sie die Lösungshäufigkeit dieser Aufgabe ein?

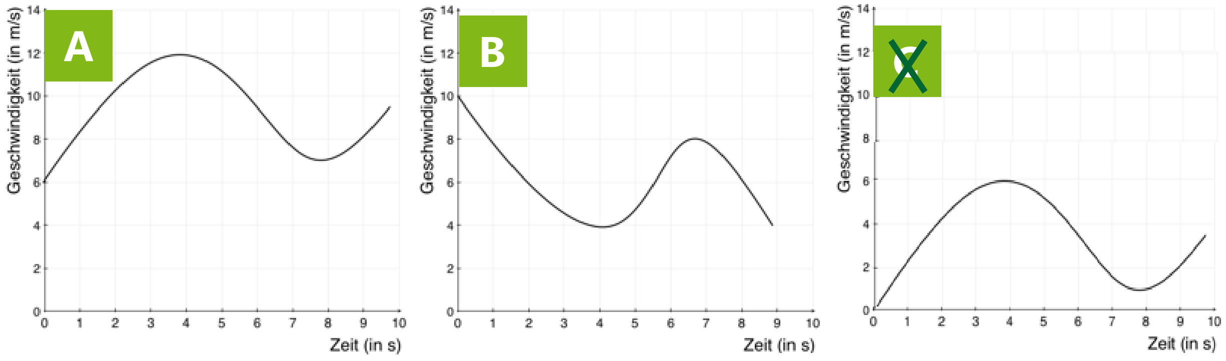
Welche **Schülerschwierigkeiten** und Unt

**Kein verständnisvoller Darstellungswechsel**

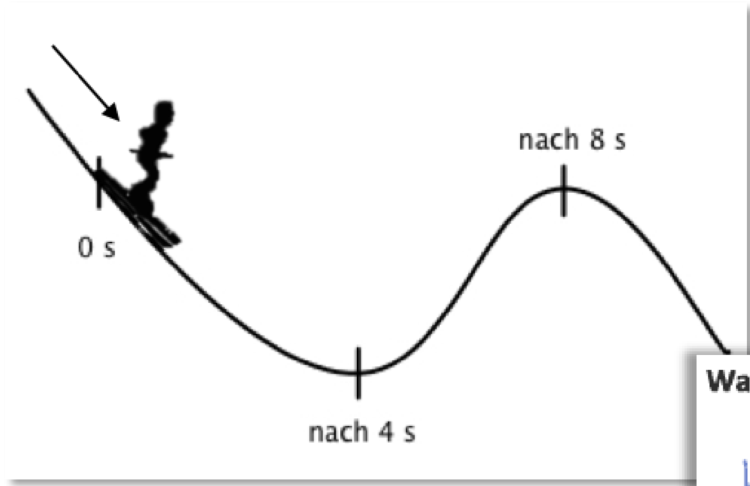
**Warum hast du dich für dieses Diagramm entschieden?**

Keine Ahnung, dass sieh einfach nur logisch aus.

Ein Skifahrer hat zum Zeitpunkt 0 Sekunden schon eine Anfangsgeschwindigkeit und lässt sich dann den Berg hinuntergleiten (ohne absichtlich zu bremsen). Welches der drei Diagramme beschreibt, wie sich seine Geschwindigkeit bei der Skifahrt abhängig von der Zeit verändert?



# Darstellungsverknüpfung und -wechsel




& Ruchniewicz, 2020, S. 9f)

**Aktivität:**

Wie hoch schätzen Sie die Lösungshäufigkeit dieser Aufgabe ein?

Welche **Schülerschwierigkeiten** und ... ehen Sie?

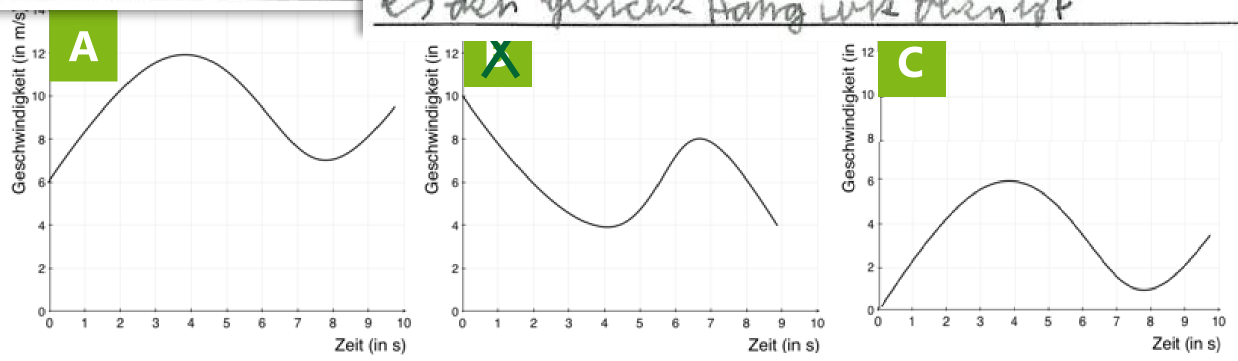
**Warum hast du dich für dieses Diagramm entschieden?**

b beschreibt die Situation am besten weil es genauso aussieht wie ~~in d~~ auf dem Bild.

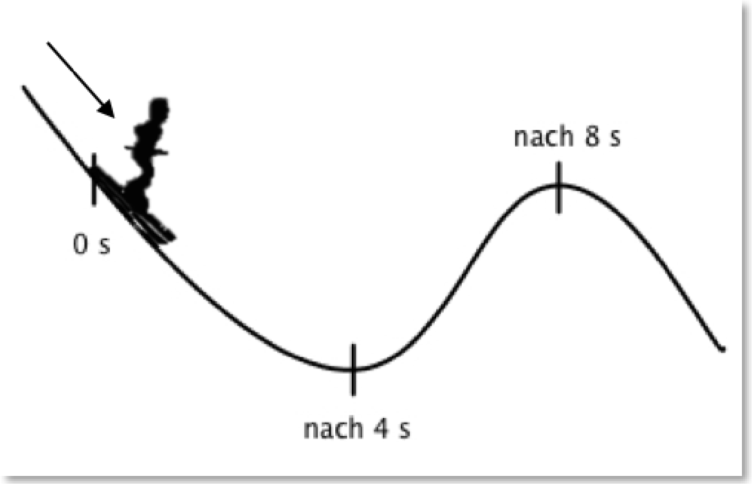
Ich habe mich für b entschieden weil es den gleiche Hang wie oben ist

Ein Skifahrer hat zum Zeitpunk... schon eine Anfangsgeschwindigkeit und lässt sich dann d... absichtlich ... Diagramm ... Geschwind... ...gig von der Zeit verändert?

**Kein verständnisvoller Darstellungswechsel →Graph-als-Bild-Fehler**



# Darstellungsverknüpfung und -wechsel



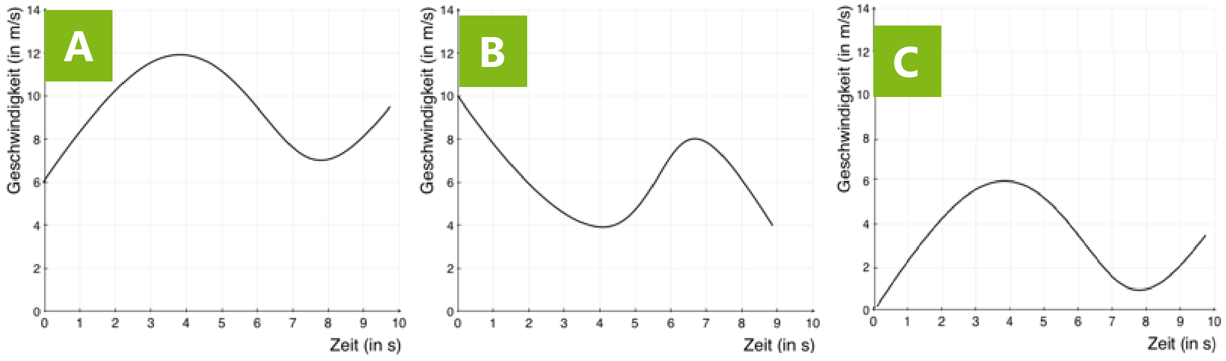

(vgl. Barzel & Ruchniewicz, 2020, S. 9f)

**Aktivität:**

Wie hoch schätzen Sie die Lösungshäufigkeit dieser Aufgabe ein?

Welche Schülerschwierigkeiten und **Unterstützungsmöglichkeiten** sehen Sie?

Ein Skifahrer hat zum Zeitpunkt 0 Sekunden schon eine Anfangsgeschwindigkeit und lässt sich dann den Berg hinuntergleiten (ohne absichtlich zu bremsen). Welches der drei Diagramme beschreibt, wie sich seine Geschwindigkeit bei der Skifahrt abhängig von der Zeit verändert?



# Darstellungsverknüpfung und -wechsel

***Beispiele für Unterstützungsmöglichkeiten / Förderansätze**:*

- Reduktion der Komplexität / Abschnittsweise Betrachtung
- Aufbau eines adäquaten Situationsmodells
- Aktivierung (& Vernetzung) der Grundvorstellungen in verschiedenen Darstellungen
- Einbindung von Hilfsdarstellungen / weiteren Darstellungen
- Anregung Darstellungswechsel in verschiedene Richtungen
- Lenken der Aufmerksamkeit auf relevante Merkmale, z.B. auf Achsenbeschriftung

Hintergründe z.B. bei Hußmann & Laakmann, 2011; Ruchniewicz, 2022

# Darstellungsverknüpfung und -wechsel

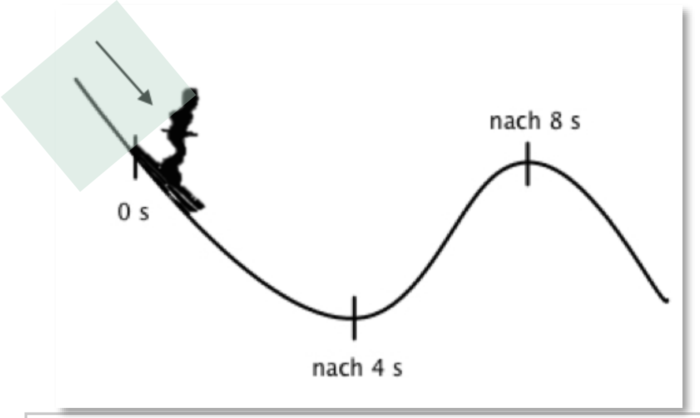
***Beispiele für Unterstützungsmöglichkeiten / Förderansätze***:

- **Reduktion der Komplexität / Abschnittsweise Betrachtung**
- **Aufbau eines adäquaten Situationsmodells**
- **Aktivierung (& Vernetzung) der Grundvorstellungen in verschiedenen Darstellungen**
- Einbindung von Hilfsdarstellungen / weiteren Darstellungen
- Anregung Darstellungswechsel in verschiedene Richtungen
- Lenken der Aufmerksamkeit auf relevante Merkmale, z.B. auf Achsenbeschriftung

# Darstellungsverknüpfung und -wechsel

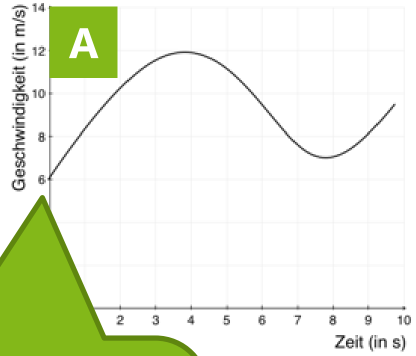
***Beispiele für Unterstützungsmöglichkeiten / Förderansätze:***

- **Reduktion der Komplexität / Abschnittsweise Betrachtung**
- **Aufbau eines adäquaten Situationsmodells**
- **Aktivierung (& Vernetzung) der Grundvorstellungen in verschiedenen Darstellungen**




(vgl. Barzel & Ruchniewicz, 2020, S. 9f)

Ein Skifahrer hat zum Zeitpunkt 0 Sekunden schon eine Anfangsgeschwindigkeit und lässt sich dann den Berg hinuntergleiten (ohne absichtlich zu bremsen). Welches der drei Diagramme beschreibt, wie sich seine Geschwindigkeit bei der Skifahrt abhängig von der Zeit verändert?

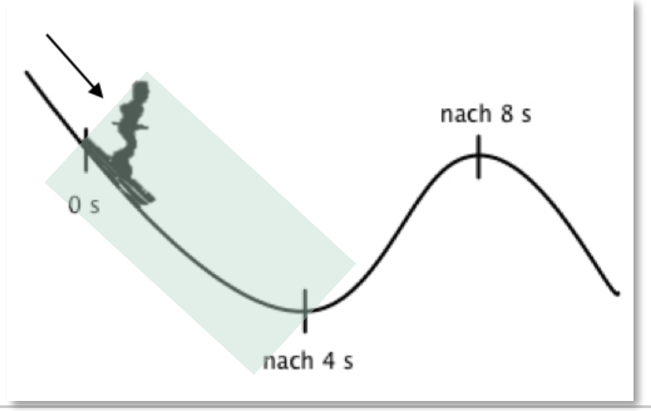



Bereits zu Beginn (0s) hat der Skifahrer eine gewisse Anfangs-geschwindigkeit.

# Darstellungsverknüpfung und -wechsel

***Beispiele für Unterstützungsmöglichkeiten / Förderansätze:***

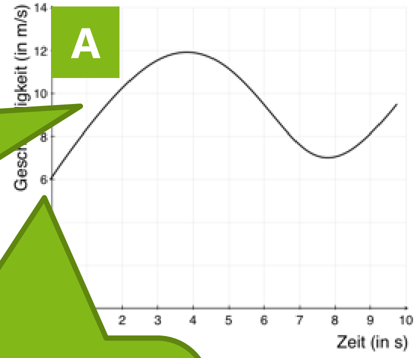
- **Reduktion der Komplexität / Abschnittsweise Betrachtung**
- **Aufbau eines adäquaten Situationsmodells**
- **Aktivierung (& Vernetzung) der Grundvorstellungen in verschiedenen Darstellungen**




(vgl. Barzel & Ruchniewicz, 2020, S. 9f)

Ein Skifahrer hat zum Zeitpunkt 0 Sekunden schon eine Anfangsgeschwindigkeit und lässt sich dann den Berg hinuntergleiten (ohne absichtlich zu bremsen). Welches der drei Diagramme beschreibt, wie sich seine Geschwindigkeit bei der Skifahrt abhängig von der Zeit verändert?

Bergab (zwischen 0s und 4s) steigt seine Geschwindigkeit.

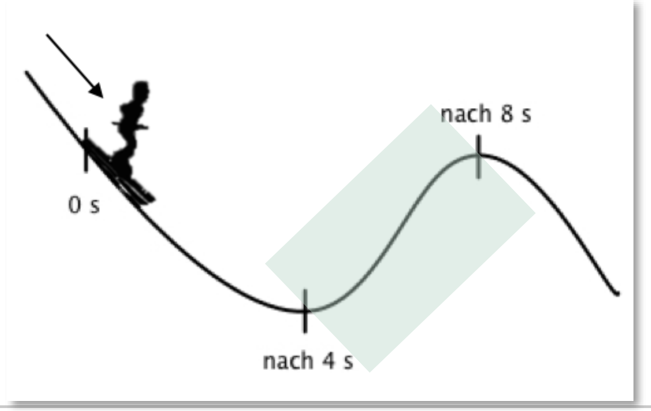



Bereits zu Beginn (0s) hat der Skifahrer eine gewisse Anfangs-geschwindigkeit.

# Darstellungsverknüpfung und -wechsel

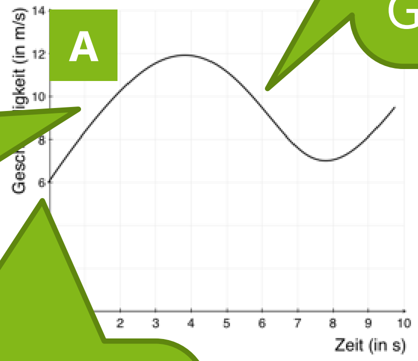
***Beispiele für Unterstützungsmöglichkeiten / Förderansätze*:**

- **Reduktion der Komplexität / Abschnittsweise Betrachtung**
- **Aufbau eines adäquaten Situationsmodells**
- **Aktivierung (& Vernetzung) der Grundvorstellungen in verschiedenen Da**




(vgl. Barzel & Ruchniewicz, 2020, S. 9f)

Ein Skifahrer hat zum Zeitpunkt 0 Sekunden schon eine Anfangsgeschwindigkeit und lässt sich dann den Berg hinuntergleiten (ohne absichtlich zu bremsen). Welches der drei Diagramme beschreibt, wie sich seine Geschwindigkeit bei der Skifahrt abhängig von der Zeit verändert?




Bergab (zwischen 0s und 4s) steigt seine Geschwindigkeit.

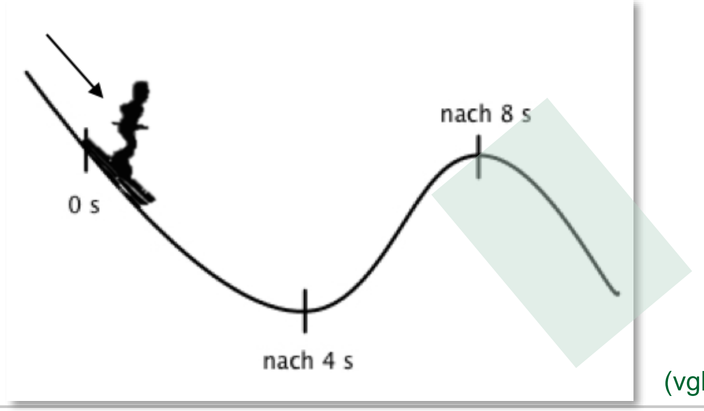
Bergauf (zwischen 4s und 8s) sinkt seine Geschwindigkeit.

Bereits zu Beginn (0s) hat der Skifahrer eine gewisse Anfangs-geschwindigkeit.

# Darstellungsverknüpfung und -wechsel

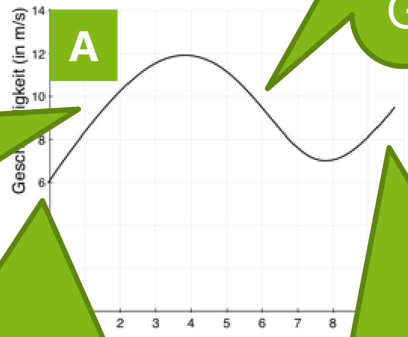
***Beispiele für Unterstützungsmöglichkeiten / Förderansätze*:**

- **Reduktion der Komplexität / Abschnittsweise Betrachtung**
- **Aufbau eines adäquaten Situationsmodells**
- **Aktivierung (& Vernetzung) der Grundvorstellungen in verschiedenen Da**




(vgl. Barzel & Ruchniewicz, 2020, S. 9f)

Ein Skifahrer hat zum Zeitpunkt 0 Sekunden schon eine Anfangsgeschwindigkeit und lässt sich dann den Berg hinuntergleiten (ohne absichtlich zu bremsen). Welches der drei Diagramme beschreibt, wie sich seine Geschwindigkeit bei der Skifahrt abhängig von der Zeit verändert?




Bergab (zwischen 0s und 4s) steigt seine Geschwindigkeit.

Bergauf (zwischen 4s und 8s) sinkt seine Geschwindigkeit.

Bereits zu Beginn (0s) hat der Skifahrer eine gewisse Anfangs-geschwindigkeit.

Am Ende (ab 8s) fährt er wieder bergab, also steigt seine Geschwindigkeit.

# Darstellungsverknüpfung und -wechsel

***Beispiele für Unterstützungsmöglichkeiten / Förderansätze***:

- Reduktion der Komplexität / Abschnittsweise Betrachtung
- Aufbau eines adäquaten Situationsmodells
- **Aktivierung (& Vernetzung) der Grundvorstellungen in verschiedenen Darstellungen**
- **Einbindung von Hilfsdarstellungen / weiteren Darstellungen**
- Anregung Darstellungswechsel in verschiedene Richtungen
- Lenken der Aufmerksamkeit auf relevante Merkmale, z.B. auf Achsenbeschriftung

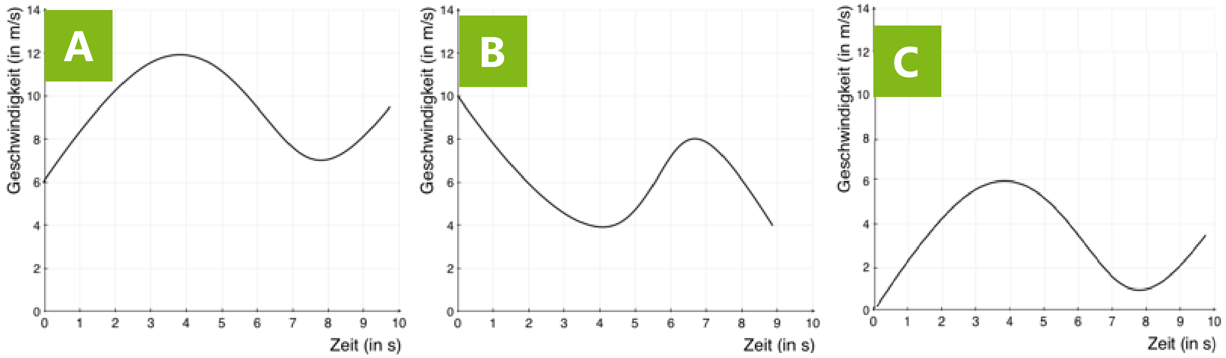
# Darstellungsverknüpfung und -wechsel

| Zeit (in s) | 0 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|
| Geschwindigkeit (in m/s) | | | |

| Zeit (in s) | 0 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|
| Geschwindigkeit (in m/s) | | | |

| Zeit (in s) | 0 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|
| Geschwindigkeit (in m/s) | | | |

**Schüleraufgabe:**
Vervollständige die Tabellen. Lies dazu aus den Graphen jeweils die Geschwindigkeit nach 0 Sekunden, nach 4 Sekunden und nach 8 Sekunden ab. Überprüfe damit deine Entscheidung für den passenden Graphen.



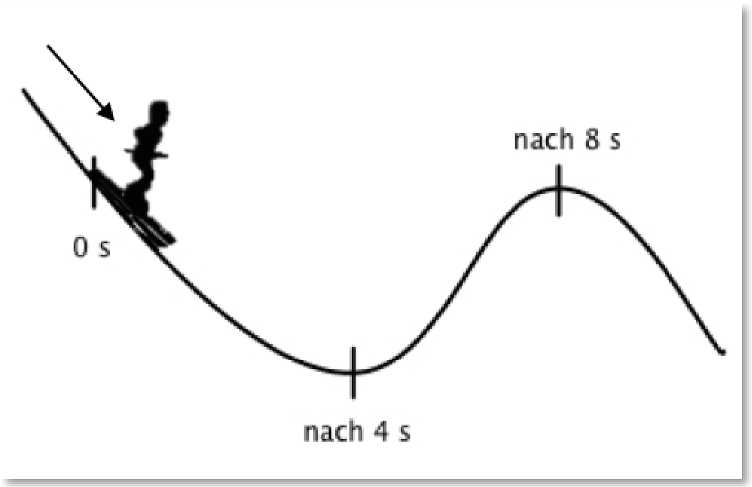

(vgl. Barzel & Ruchniewicz, 2020, S. 9f)

# Darstellungsverknüpfung und -wechsel

***Beispiele für Unterstützungsmöglichkeiten / Förderansätze*:**

- Reduktion der Komplexität / Abschnittsweise Betrachtung
- Aufbau eines adäquaten Situationsmodells
- Aktivierung (& Vernetzung) der Grundvorstellungen in verschiedenen Darstellungen
- Einbindung von Hilfsdarstellungen / weiteren Darstellungen
- **Anregung Darstellungswechsel in verschiedene Richtungen**
- Lenken der Aufmerksamkeit auf relevante Merkmale, z.B. auf Achsenbeschriftung

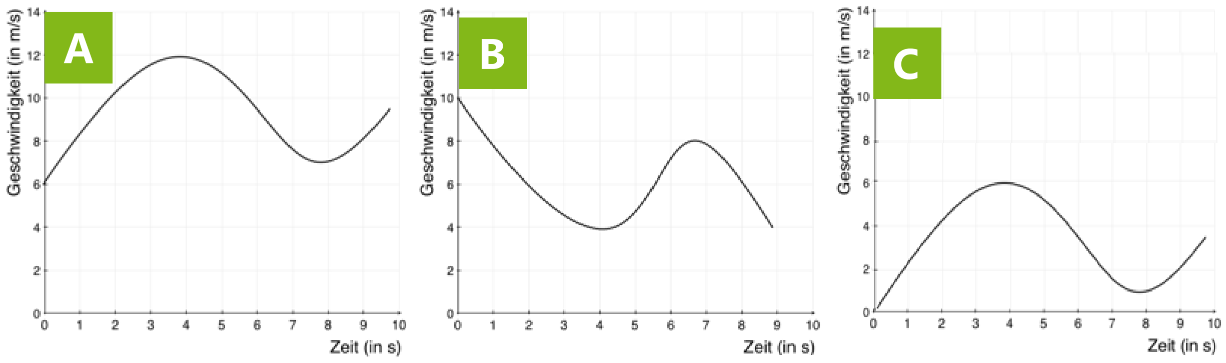
# Darstellungsverknüpfung und -wechsel




(vgl. Barzel & Ruchniewicz, 2020, S. 9f)

**Schüleraufgabe:**
Wähle Graph B oder C und schreibe dazu eine Ski-Geschichte.

Ein Skifahrer hat zum Zeitpunkt 0 Sekunden schon eine Anfangsgeschwindigkeit und lässt sich dann den Berg hinuntergleiten (ohne absichtlich zu bremsen). Welches der drei Diagramme beschreibt, wie sich seine Geschwindigkeit bei der Skifahrt abhängig von der Zeit verändert?



# Darstellungsverknüpfung und -wechsel

***Beispiele für Unterstützungsmöglichkeiten / Förderansätze:***

- Reduktion der Komplexität / Abschnittsweise Betrachtung
- Aufbau eines adäquaten Situationsmodells
- Aktivierung (& Vernetzung) der Grundvorstellungen in verschiedenen Darstellungen
- Einbindung von Hilfsdarstellungen / weiteren Darstellungen
- Anregung Darstellungswechsel in verschiedene Richtungen
- **Lenken der Aufmerksamkeit auf relevante Merkmale, z.B. auf Achsenbeschriftung**

# Darstellungsverknüpfung und -wechsel

***Beispiele für Unterstützungsmöglichkeiten / Förderansätze:***

- Reduktion der Komplexität / Abschnittsweise Betrachtung
- Aufbau eines adäquaten Situationsmodells
- Aktivierung (& Vernetzung) der Grundvorstellungen in verschiedenen Darstellungen
- Einbindung von Hilfsdarstellungen / weiteren Darstellungen
- Anregung Darstellungswechsel in verschiedene Richtungen
- Lenken der Aufmerksamkeit auf relevante Merkmale, z.B. auf Achsenbeschriftung

→ **Grundlage: Verständnis der einzelnen Darstellungen**

→ **Darauf aufbauend: Vernetzen der Darstellungen bzw. wesentlicher Merkmale**

# Darstellungsverknüpfung und -wechsel

**Exkurs: Wissenserwerb & Lernen mit multiplen Darstellungen**

- Wissen wird vernetzt abgespeichert →ein gutes Verständnis ist durch vielfältige Verbindungen und sinnvolle Strukturierung charakterisiert (z.B. Hiebert & Carpenter, 1992; Royer et al., 1993)
- Erfolgreiches Lernen zeichnet sich durch die Integration unterschiedlich dargestellter Informationen in kohärenten mentalen Repräsentationen aus (z.B. Schnotz & Bannert, 2003)
- Häufige Probleme beim…
  (z.B. Ainsworth et al., 2002; Lowe, 1999)
  - ➢ Erkennen relevanter Merkmale / Strukturen in Darstellungen →Konzentration auf Oberflächenmerkmale
  - ➢ Vernetzen verschiedener Darstellungen

# Darstellungsverknüpfung und -wechsel

**Darstellungen und Darstellungswechsel spielen eine zentrale Rolle (nicht nur) beim Verstehen funktionaler Zusammenhänge**
(Adu-Gyamfi, 2007; Barzel et al., 2005; Bodemer & Faust, 2006; Heinze et al., 2009)

- Sie bieten einen Zugang zum abstrakten mathematischen Objekt
- Sie sind unerlässlich für die Begriffsbildung
- Sie sind notwendig für flexibles und adaptives Problemlösen

**Erinnerung**

# Darstellungsverknüpfung und -wechsel

**Darstellungen und Darstellungswechsel spielen eine zentrale Rolle (nicht nur) beim Verstehen funktionaler Zusammenhänge**
(Adu-Gyamfi, 2007; Barzel et al., 2005; Bodemer & Faust, 2006; Heinze et al., 2009)

- Sie bieten einen Zugang zum abstrakten mathematischen Objekt
- Sie sind unerlässlich für die Begriffsbildung
- Sie sind notwendig für flexibles und adaptives Problemlösen
- Insgesamt: Lernen kann signifikant verbessert werden, wenn Lernende angeregt werden, unterschiedlich dargestellte Informationen zu vernetzen

Einzelne Darstellung: Funktionsmerkmale identifizieren ⇄ Mehrere Darstellungen: Funktionsmerkmale vernetzen

# Darstellungsverknüpfung und -wechsel

**Vernetzen und Wechseln von Funktionsdarstellungen**
(z.B. Adu-Gyamfi et al., 2012, Ruchniewicz, 2022)

- Sinnvolle Darstellungswechsel …
  - ➢ keine algorithmische Überführung der Ausgangs- in eine Zieldarstellung
  - ➢ vielmehr Verstehen und mentale Repräsentation gegebener Darstellung als Grundlage des Darstellungswechsels
  - ➢ i.d.R. keine „Übersetzung“ der gesamten Darstellung, sondern einiger wesentlicher Merkmale
- Diese wesentlichen Merkmale müssen in den verschiedenen Darstellungen erkannt und vernetzt werden.
- Translation-Verification Modell: Beim Darstellungswechsel ständige Überprüfung, ob wesentliche Merkmale in den beteiligten Darstellungen angemessen umgesetzt sind

Einzelne Darstellung:
Funktionsmerkmale identifizieren

⇄

Mehrere Darstellungen:
Funktionsmerkmale vernetzen

# Darstellungsverknüpfung und -wechsel

**Exemplarische Aktivitäten bei Darstellungswechseln** (Barzel et al., 2021, S. 75)

| von (↓); nach (→) | Situativ-sprachlich | Numerisch-tabellarisch | Graphisch-visuell | Formal-symbolisch |
|---|---|---|---|---|
| Situativ-sprachlich | Umformulieren, Realsituationen vereinfachen, reduzieren | Beispielwerte bestimmen | Visualisieren einer Situation, Skizzieren | Modellieren (Annähern, Kurven hindurchlegen) |
| Numerisch-tabellarisch | Interpretieren der Tabelle bzgl. des Kontexts | Verfeinern oder Vergröbern der Tabelle, Sortieren | Werte in Punktediagramm darstellen | Wachstumsverhalten erkennen |
| Graphisch-visuell | Interpretieren des Graphen bzgl. eines Kontexts | Werte ablesen | Strecken und Stauchen, Ändern der Achsenskalierung | Typische Form erkennen, Annähern, Kurven hindurchlegen |
| Formal-symbolisch | Formeln interpretieren (z. B. durch Deuten der Funktionsparameter) | Argumente einsetzen und Werte bestimmen | Skizzieren, durch Deuten der Funktionsparameter auf typische Form schließen | Algebraisch umformen |

# Relevanz

**Warum ist es wichtig, funktionales Denken zu entwickeln?**

- Kohärentes Lernen: Vorerfahrungen aus Alltag und Grundschule werden fortgesetzt, strukturiert & formalisiert
- Verständnisvolles Bearbeiten u.a. von Aufgaben der Abschlussprüfungen

**Erinnerung**

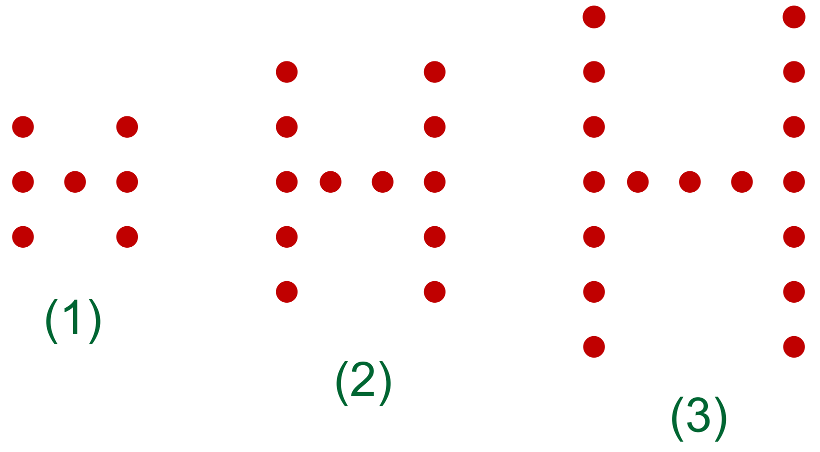
Emil hat die ersten drei Muster aus Plättchen gelegt.

a) Wie viele Plättchen werden für das 5. Muster benötigt?

b) Eine der abgedruckten Formeln kann zur Berechnung der Plättchenanzahl bei allen Mustern verwendet werden. Kreuze diese Formel an!

☐ $s = n + 6$
☐ $s = 5n + 2$
☐ $s = 3n + 4$

→n gibt die Stelle des jeweiligen Musters an
→s gibt die Summe der benötigten Plättchen eines Musters an




Angelehnt an eine Aufgabe der Realschul-Abschlussprüfung

# Relevanz

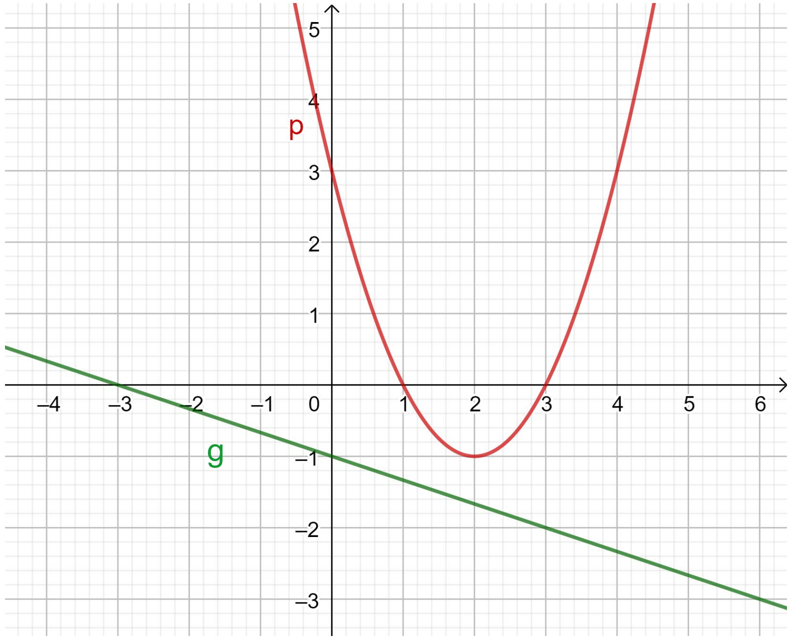
**Warum ist es wichtig, funktionales Denken zu entwickeln?**

- Kohärentes Lernen: Vorerfahrungen aus Alltag und Grundschule werden fortgesetzt, strukturiert & formalisiert
- Verständnisvolles Bearbeiten u.a. von Aufgaben der Abschlussprüfungen

Susanne hat die Parabel p mit der Funktionsgleichung $y = x^2 - 4x + 5$ und die Gerade mit der Funktionsgleichung $y = \frac{1}{3}x - 1$ fehlerhaft in das Koordinatensystem gezeichnet.

a) Beschreibe die Fehler im Schaubild.

b) Zeichne die Graphen richtig in das Koordinatensystem ein.




Angelehnt an eine Aufgabe der Realschul-Abschlussprüfung

**Aktivität:**

Inwieweit spielen die Grundvorstellungen (bezogen auf Graph / Gleichung) für die Bearbeitung dieser Aufgabe eine Rolle?

# Relevanz

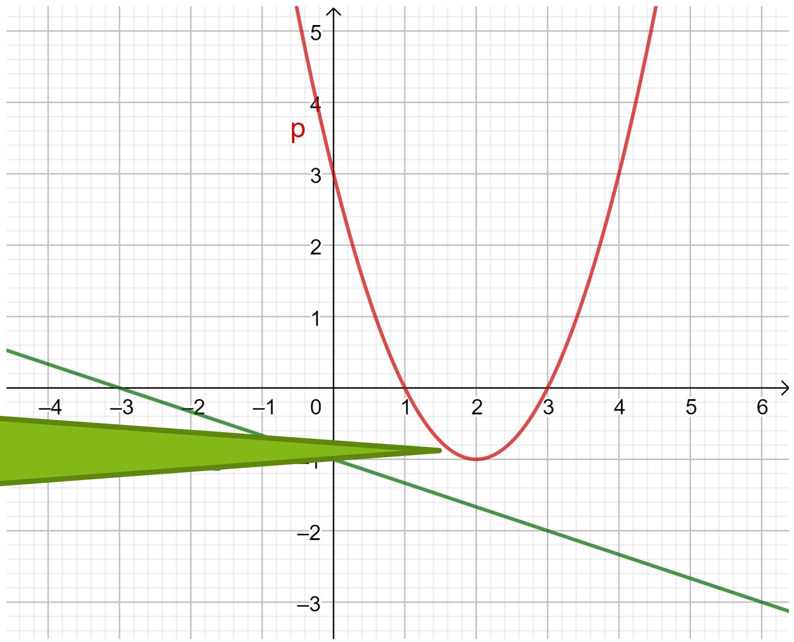
**Warum ist es wichtig, funktionales Denken zu entwickeln?**

- Kohärentes Lernen: Vorerfahrungen aus Alltag und Grundschule werden fortgesetzt, strukturiert & formalisiert
- Verständnisvolles Bearbeiten u.a. von Aufgaben der Abschlussprüfungen

Susanne hat die Parabel p mit der Funktionsgleichung $y = x^2 - 4x + 5$ und die Gerade mit der Funktionsgleichung $y = \frac{1}{3}x - 1$ fehlerhaft in das Koordinatensystem gezeichnet.

a) Beschreibe die Fehler im Schaubild.

b) Zeichne die Graphen richtig in das Koordinatensystem ein.




Angelehnt an eine Aufgabe der Realschul-Abschlussprüfung

**Scheitelpunktform zur Parabelgleichung:**
$y = (x-2)^2 + 1$
→Häufige Fehler: $x_S = -2$ bzw. S (-2|-1) oder S (2|-1)
→Einsetzen von $x = 2$ liefert 0 in der Klammer und somit den kleinsten Funktionswert 1

# Relevanz

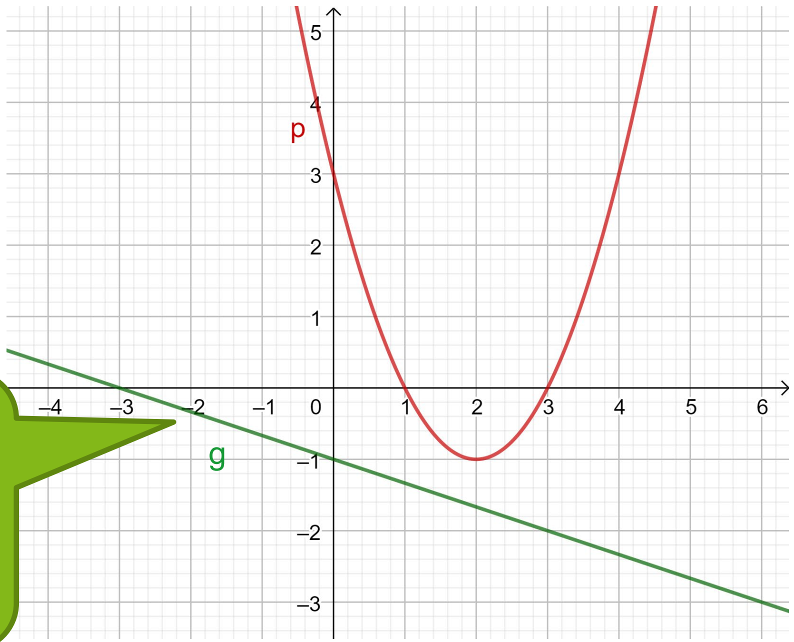
**Warum ist es wichtig, funktionales Denken zu entwickeln?**

- Kohärentes Lernen: Vorerfahrungen aus Alltag und Grundschule werden fortgesetzt, strukturiert & formalisiert
- Verständnisvolles Bearbeiten u.a. von Aufgaben der Abschlussprüfungen

Susanne hat die Parabel p mit der Funktionsgleichung $y = x^2 - 4x + 5$ und die Gerade mit der Funktionsgleichung $y = \frac{1}{3}x - 1$ fehlerhaft in das Koordinatensystem gezeichnet.

a) Beschreibe die Fehler im Schaubild.

b) Zeichne die Graphen richtig in das Koordinatensystem ein.




Angelehnt an eine Aufgabe der Realschul-Abschlussprüfung

**Hilfreiche Vorgehensweisen Gerade:**
- Zuordnungsvorstellung: Punktprobe; Wertetabelle
- Kovariationsvorstellung: Wie verändert sich y, wenn x größer wird?
- Objektvorstellung: positive Steigung entspricht steigendem Graphen; Zeichnen über Steigung und y-Achsenabschnitt

# Relevanz

**Warum ist es wichtig, funktionales Denken zu entwickeln?**

- Kohärentes Lernen: Vorerfahrungen aus Alltag und Grundschule werden fortgesetzt, strukturiert & formalisiert
- Verständnisvolles Bearbeiten u.a. von Aufgaben der Abschlussprüfungen
  - ➢ Ohne Grundvorstellungen werden Aufgaben höchstens auf prozeduraler Ebene bearbeitet ohne konzeptuelles Verständnis →Fehler- und vergessensanfällig (Sproesser et al., 2018; 2020; Rittle-Johnson et al., 2015)

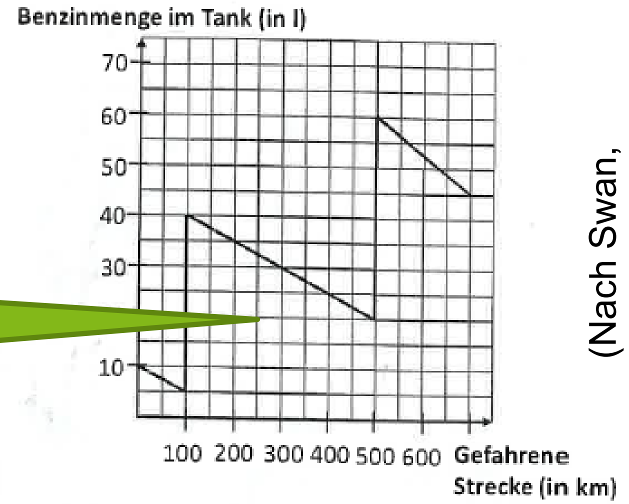
# Relevanz

**Warum ist es wichtig, funktionales Denken zu entwickeln?**

- Kohärentes Lernen: Vorerfahrungen aus Alltag und Grundschule werden fortgesetzt, strukturiert & formalisiert
- Verständnisvolles Bearbeiten u.a. von Aufgaben der Abschlussprüfungen
  - ➢ Ohne Grundvorstellungen werden Aufgaben höchstens auf prozeduraler Ebene bearbeitet ohne konzeptuelles Verständnis →Fehler- und vergessensanfällig (Sproesser et al., 2018; 2020; Rittle-Johnson et al., 2015)

Das folgende Schaubild zeigt den Benzinverbrauch eines PKWs während einer Autobahnfahrt.

**Wie viele Kilometer legt der PKW zwischen dem ersten und zweiten Tanken zurück?**




Martina: „Zwischen dem ersten und zweiten Mal Tanken legte der PKW 500 km zurück.“

(Nach Swan, 1985, S. 71)

# Relevanz

**Warum ist es wichtig, funktionales Denken zu entwickeln?**

- Kohärentes Lernen: Vorerfahrungen aus Alltag und Grundschule werden fortgesetzt, strukturiert & formalisiert
- Verständnisvolles Bearbeiten u.a. von Aufgaben der Abschlussprüfungen
  - Ohne Grundvorstellungen werden Aufgaben höchstens auf prozeduraler Ebene bearbeitet ohne konzeptuelles Verständnis →Fehler- und vergessensanfällig (Sproesser et al., 2018; 2020; Rittle-Johnson et al., 2015)
  - Verständnislose Anwendung von Prozeduren erschwert das Weiterlernen / Vernetzen, z.B. in Bezug auf Funktionsgleichung, LGS

# Relevanz

**Warum ist es wichtig, funktionales Denken zu entwickeln?**

- Kohärentes Lernen: Vorerfahrungen aus Alltag und Grundschule werden fortgesetzt, strukturiert & formalisiert
- Verständnisvolles Bearbeiten u.a. von Aufgaben der Abschlussprüfungen
  - ➢ Ohne Grundvorstellungen werden Aufgaben höchstens auf prozeduraler Ebene bearbeitet ohne konzeptuelles Verständnis →Fehler- und vergessensanfällig (Sproesser et al., 2018; 2020; Rittle-Johnson et al., 2015)
  - ➢ Verständnislose Anwendung von Prozeduren erschwert das Weiterlernen / Vernetzen, z.B. in Bezug auf Funktionsgleichung, LGS
  - ➢ Ausbildung des Funktionsbegriffs ist mehr als Anwenden von Prozeduren

# Relevanz

**Warum ist es wichtig, funktionales Denken zu entwickeln?**

- Kohärentes Lernen: Vorerfahrungen aus Alltag und Grundschule werden fortgesetzt, strukturiert & formalisiert
- Verständnisvolles Bearbeiten u.a. von Aufgaben der Abschlussprüfungen
- Bestimmte Merkmale von Lehr-Lern-Settings unterstützen Lernprozesse, z.B. **Situiertheit**
  - ➢ Situiertheit kann Verständnis unterstützen und das reine Anwenden von Prozeduren reduzieren (Zindel, 2019)
  - ➢ Situierte Aufgaben sind für Lernende oft besser zugänglich, da der vertraute Kontext informelle und verständnisorientierte Strategien begünstigt
    →Nathan & Koedinger, 2000: „symbol-precedence view“ nicht zutreffend

→ Mehr zu solchen „Design Prinzipien“ folgt demnächst

# Zusammenfassung: 4. Veranstaltung

- **Funktionales Denken**
  - Wichtige Begriffe
  - Darstellungswechsel
  - Bedeutung

**Lernziele:**

- Unterschiedliche Darstellungen von Funktionen kennen und wissen, wie Darstellungswechsel stattfinden/gefördert werden können.
- Den Begriff des funktionalen Denkens kennen, insbesondere die Unterscheidung zwischen Funktion, funktionalem Zusammenhang und funktionalem Denken
- Die Bedeutung des funktionalen Denkens einschätzen können.

# Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und bis zum nächsten Mal!

# Funktionales Denken von Schülerinnen und Schülern fördern – Spezifische Lernumgebungen erkunden und (weiter-)entwickeln

5. Sitzung:

Designprinzipien: forschendes Lernen, Situiertheit, Embodiment, (digitale) Werkzeuge; Einführung Module

Ute Sproesser
Kerstin Frey

# Agenda: 5. Veranstaltung

- **Design Prinzipien**
  - Forschendes Lernen
  - Situiertheit
  - Embodiment
  - (Digitale) Werkzeuge
- **Vorstellung Modul**
  - Allgemein

**Lernziele:**

- Die vier Designprinzipien kennenlernen (später mehr).
- Den Aufbau der Module mit Handreichung und Lernumgebung kennen.
- Lernziele der Lernumgebungen identifizieren und mit den Grundvorstellungen verknüpfen können.

# Designprinzipien der Lernumgebungen

## Überblick

**FORSCHENDES LERNEN**

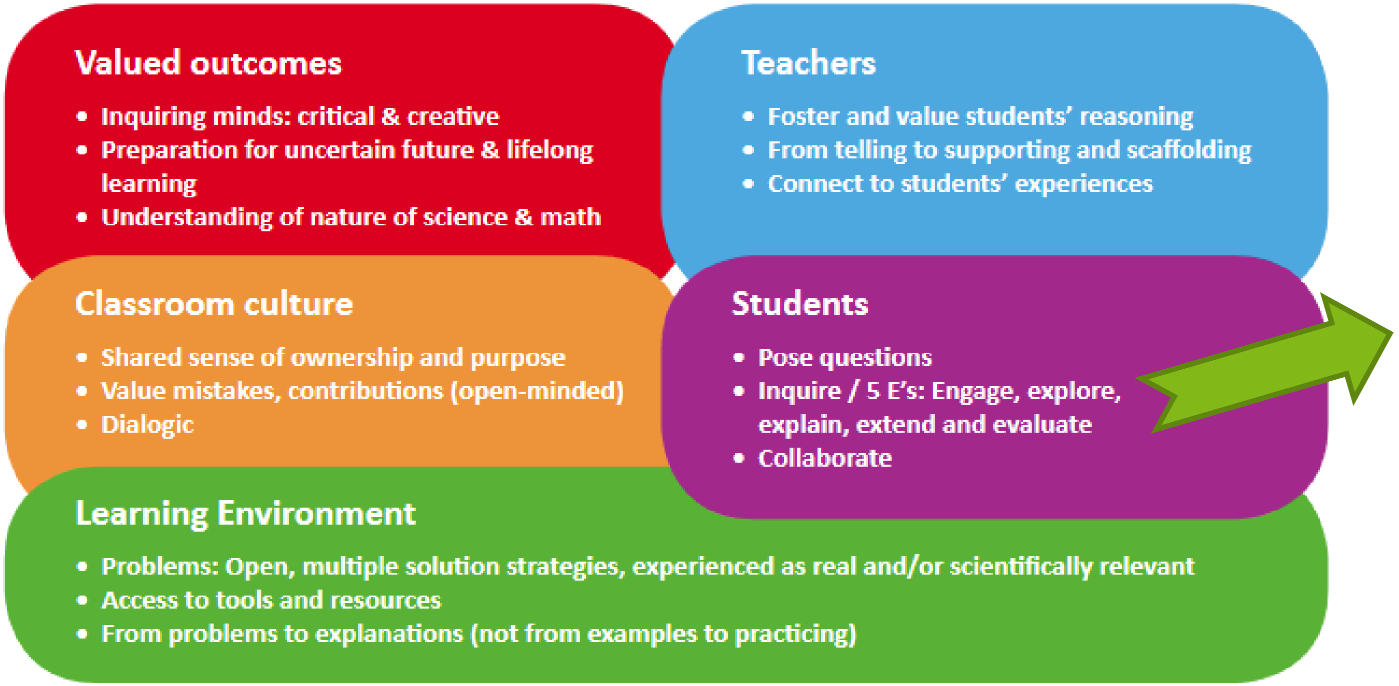
**SITUIERTHEIT**

**EMBODIMENT**

**(DIGITALE) WERKZEUGE**

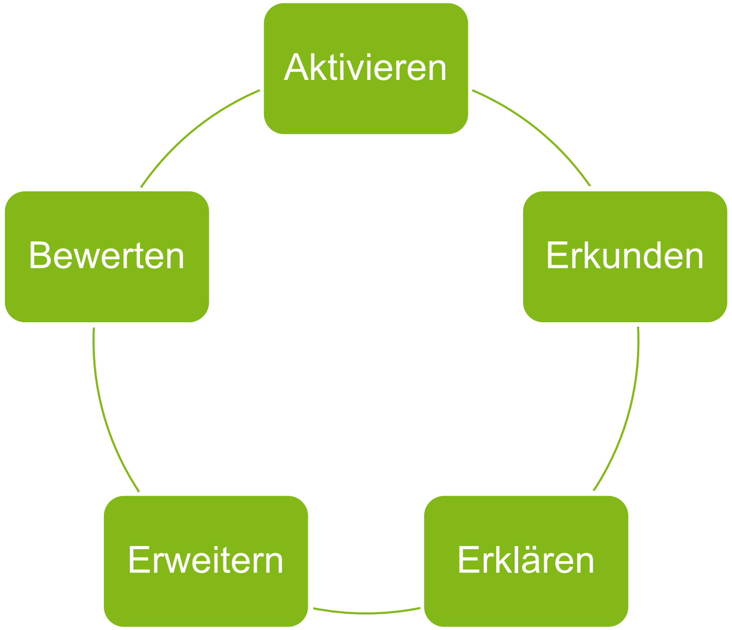
# Designprinzipien der Lernumgebungen

## 1. Forschendes Lernen




https://primas-project.eu/wp-content/uploads/sites/323/2017/11/primas_final_publication.pdf [15.6.2022]

**Zentrale Aktivitäten:**




(mehr dazu z.B. bei Dorier & Maass, 2020; Artigue & Blomhøj, 2013)

**Förderung von:**

- Neugierde & kritischem Denken
- Konstruktion & Anwendung neuen Wissens
- Kooperation & Kommunikation

→Schülerinnen und Schüler formulieren Fragen und beantworten diese

# Designprinzipien der Lernumgebungen

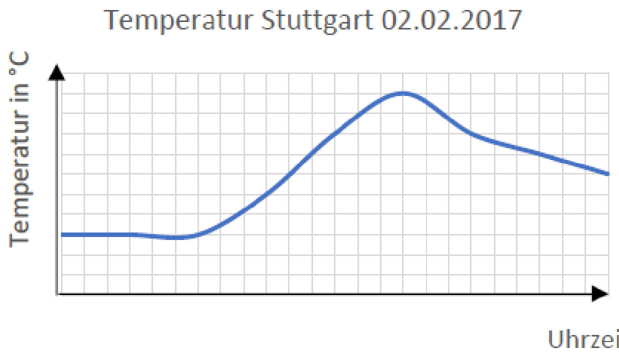
## 2. Situiertheit

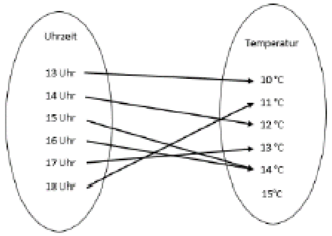
**Fundamental für Funktionsbegriff:**

Feststellen, Fordern, Erzeugen & Wiedergeben von Abhängigkeiten oder Zusammenhängen zwischen Variablen der physikalischen, sozialen und / oder geistigen Welt

(Freudenthal, 1983, S. 494)

Für ein Schulprojekt sammelst du Temperaturdaten und wertest diese aus. Deine Ergebnisse stellst du als Pfeildiagramm und als Temperatur-Zeit-Graphen dar.
Hier siehst du die zwei verschiedenen Darstellungen, welche die Temperatur in Abhängigkeit von der Uhrzeit angeben.




Heute entdeckst du, wie du eindeutige Zuordnungen und Funktionen erkennen kannst. Dafür untersuchst du den Zusammenhang zwischen Temperatur und Uhrzeit in Pfeildiagramm und Schaubildern.

(mehr dazu z.B. bei Freudenthal, 1983; Gravemeijer & Terwel, 2000)

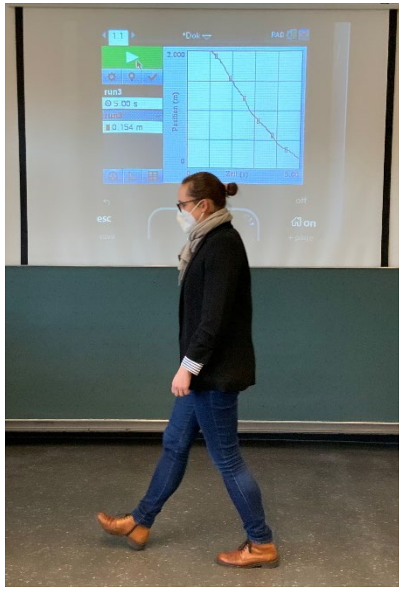
# Designprinzipien der Lernumgebungen

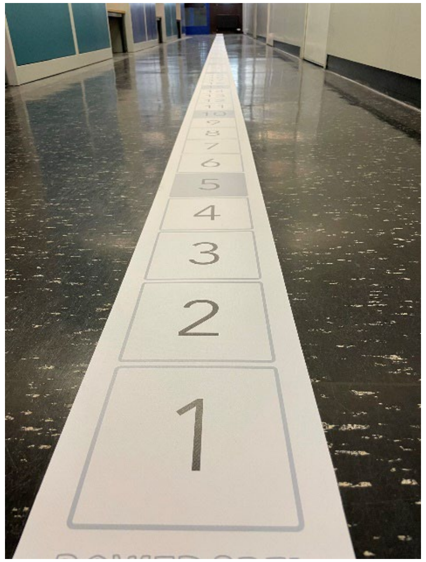
## 3. Embodiment

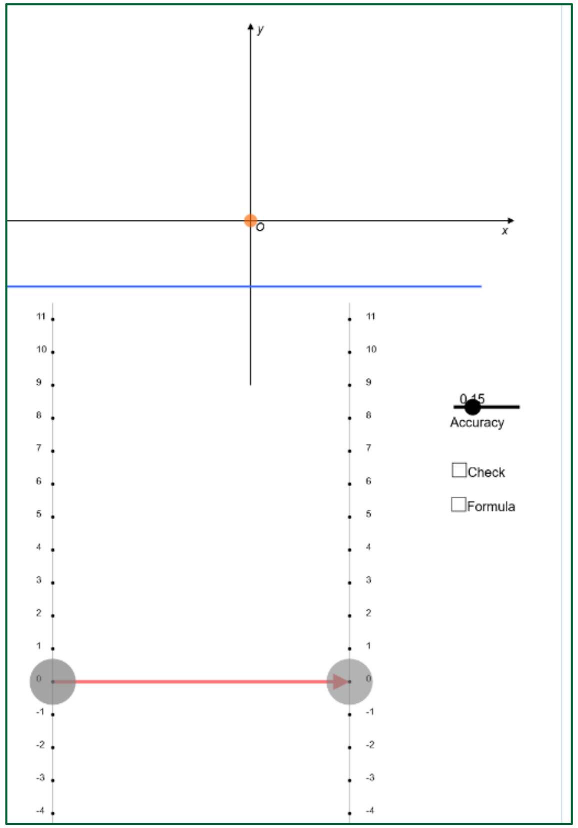
**Zentrale Ideen:**

- Alles was eine Person (bewusst) erlebt und wahrnimmt, wird Teil der Kognition
- Körperliche Erfahrungen sind essentiell für die Kognition
- Mathematische Verstehensprozesse können auf körperliche Erfahrungen / Bewegungen aufbauen

(mehr dazu z.B. bei Duijzer et al., 2019; Lakoff & Nunez, 2000)





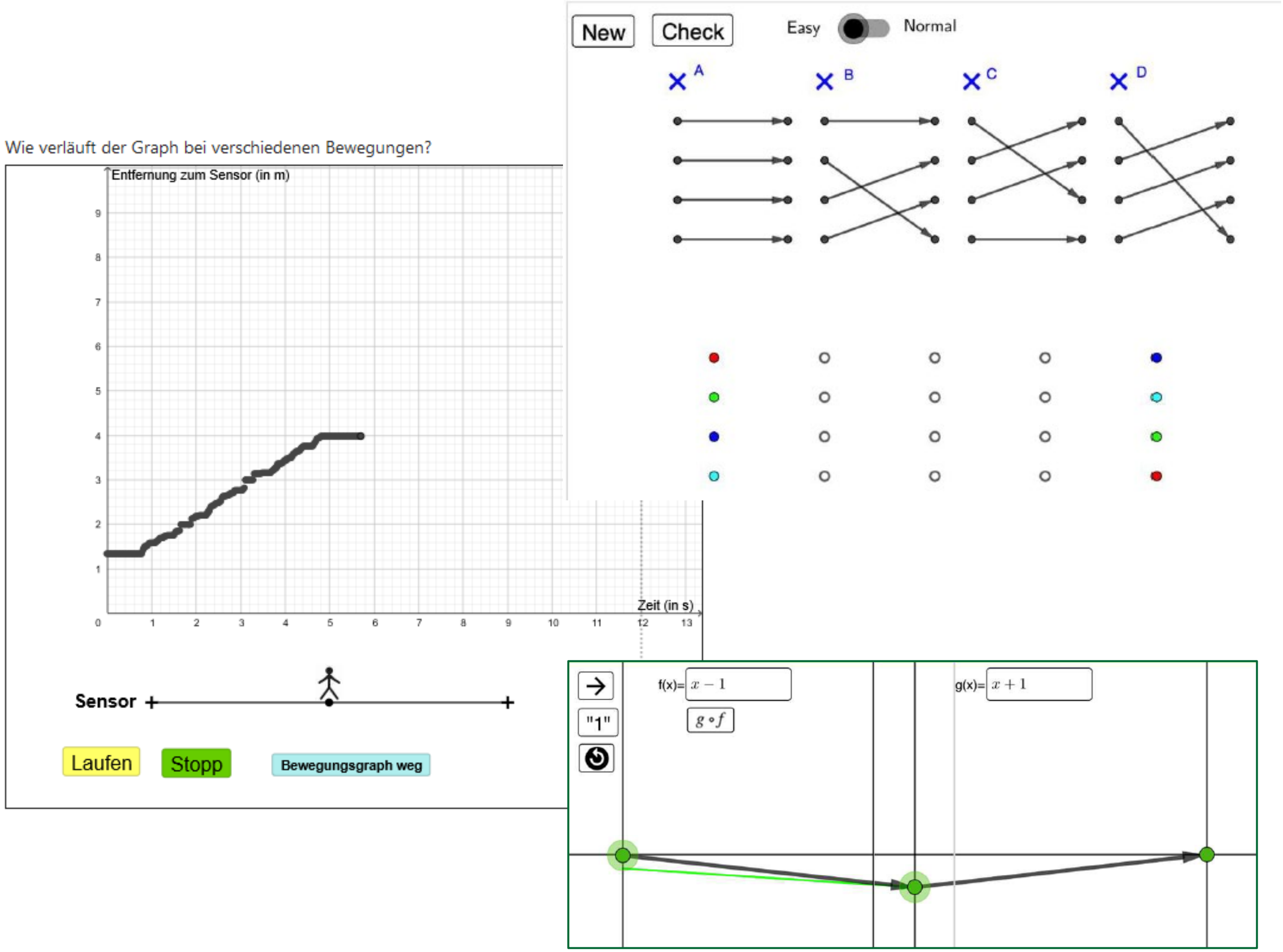
# Designprinzipien der Lernumgebungen

## 4. (Digitale) Werkzeuge

**Zentrale Ideen:**

- Nutzung von Werkzeugen erweitert Handlungsspielraum & lässt viele (kognitive) Aufgaben einfacher und effizienter erledigen
- Vielzahl an digitalen Werkzeugen für Mathematikunterricht verfügbar
- Verknüpfung mit Embodiment möglich

(mehr dazu z.B. bei Drijvers, 2019; Hoyles, 2018; Monaghan et al., 2016)



# Einführung Module

## Handreichung

### Bestandteile der Module:

- Handreichung
  - ➢ Startseite(n)
    - ✓ Modulname
    - ✓ Zeitbedarf
    - ✓ Zielgruppe
    - ✓ Modulbeschreibung
    - ✓ Schwerpunkte der Designprinzipien
    - ✓ Schwerpunkte der Grundvorstellungen
    - ✓ Lernziele

**Handreichung zum Forschermodul „Optimaler Tarif“**

**Zielgruppe:** Klassenstufe 7 (GYM) & Kla

**Zeitbedarf:** 90 Minuten

**Technologie:** Computer/ Tablets für Schü
Projektor, Dokumentenkam

**Modulbeschreibung:**
In diesem Modul untersuchen Schüler*inn
einem E-Scooter Anbieter und entdecken
Funktionsgleichung. Zusätzlich können
verschiedenen Parametern auf den Funkti
ihr Wissen zu den Parametern um den op
Optional: Zusätzlich lernen die Schüler*in

funThink
Enhancing functional thinking
from primary to upper secondary school

**Lesson Plan**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Module:** | Patterns | | | |
| **Teaching Hours:** | 6 x 40-minutes | | | |
| **Grade Level/Age Range:** | 6 | | | |
| **Brief Description:** | The module engages students with growing patterns. Students engage in identifying and representing growing patterns, in finding recursive and functional relations. | | | |
| **Design Principles:** | **Inquiry** | | | |
| | **Situatedness** | | | |
| | **Digital tools** | | | |
| | **Embodiment** | | | |
| | • Meaningful: Build on students' intuitive knowledge and daily life experiences with real-life scenarios<br>• Embodiment: Perceptual-motor (action-perception) experiences with noticing the covariation and correspondence relation by grounding the understanding on concrete actions about how the pattern grows<br>• Inquiry based learning: explore recursive and functional relations<br>• Digital: tablet devices equipped with appropriate apps<br>• Didactical phenomenology / situatedness: the covariation and correspondence relations are recorded, tabulatized and mathematized | | | |
| **Functional Thinking:** | **Input – Output** | | | |
| | **Covariation** | | | |
| | **Correspondence** | | | |
| | **Object** | | | |
| **Learning Goals:** | ✓ Identify growing and repeating patterns<br>✓ Represent and describe growing patterns using words, table | | | |

# Einführung Module

**Bestandteile der Module:**

- Handreichung
  - ➢ Startseite(n)
  - ➢ Verlaufsskizze mit weiteren Materialien
  - ➢ Aufgaben mit Erklärungen (Musterlösungen)
  - ➢ Ggf. weitere Materialien
  - ➢ Didaktische Hinweise

**Unterrichtsskizze zum Forschermodul „optimaler Tarif“**

| Phase | Lehrer-Schüler-Interaktion | Didaktisch-Methodischer Kc Sozialform |
|---|---|---|
| **Motivierender Einstieg**<br><br>(10 min) | *„Heute untersuchen wir verschiedene Tarife und versuchen den optimalen Tarif zu finden.“*<br><br>L führt in das Thema Tarife ein. L erklärt was ein Tarif ist und fragt S nach ihnen bekannten Tarifen.<br><br>**Vorstellung Tarife Scooter Star:**<br>*„Hier seht ihr drei verschiedene Tarife eines E-Scooter Verleihers. Diese schauen wir uns genauer an.“* | L-S-Gespräch<br><br>Motivation durch Lebensweltbezug. Das auf eine den Schüler*innen bekannte Th gewählte Thema kann der Wissensaufba Schüler*innen sinnhaften Kontext stattfi dadurch nachhaltig gefördert (Situierthe<br><br>Aktivierung von Vorwissen |

**Activity 1.**
The student assignment (identical with the one in the student handout).

*Students are engaged in identifying patterns that could be created with their classmates. The teacher is anticipated to select ideas of students' patterns and engage students in constructing them in class. The activity intends to be concluded by identifying repeating and growing patterns.*

*Useful questions: How is the pattern constructed? Why is it a pattern? (repeats or grows?) What does it change and what does it stay the same each time?*

**Suggested tools/materials:** Students

**Estimated duration:** 15 minutes

**Activity 2.**
The student assignment (identical with the one in the student handout).

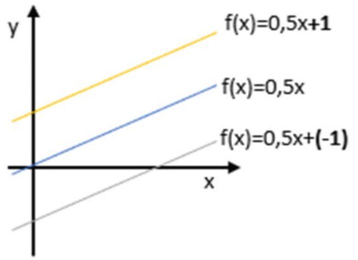
*It is anticipated for students to explore the structure of a growing pattern, that of Human Pyramid, and then to attempt to construct a bigger one (not necessarily the "next" one). Students could be*

**Forscherkenntnis „optimaler Tarif“**

Eine Veränderung des Startwerts c und der Steigung m hat Einfluss auf den Graphen der linearen Funktion.

**Startwert c/ y-Achsenabschnitt:**

- Ist der Startwert ____________, schneidet der Graph die y-Achse **oberhalb** der x-Achse, z. B. f(x)=0,5x**+1**.
- Ist der Startwert ____________, schneidet der Graph die y-Achse **unterhalb** der x-Achse, z.B. f(x)=0,5x+(**-1**).
- Ist der Startwert _________, verläuft der Graph durch den **Ursprung (0/0)**, z. B. f(x)=0,5x.
  Diese Funktion nennt man **proportionale Funktion.**




**Steigung m:**

y
f(x)=0,5x+1

# Einführung Module

## Lernumgebung

## Bestandteile der Module:

- Handreichung
- Lernumgebung

Scanne den QR-Code und öffne „Optimaler Tarif“. Bearbeite die Forscheraufträge und notiere deine Ergebnisse.

Forscherauftrag 1: ***Was kann man in einem Tarif verändern?***

a) Stelle mit den Schiebereglern nun folgende Tarife ein.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Tarif ① | Grundgebühr: **4,00 €** | und | Gebühr pro Minute: 0,50 € |
| Tarif ② | Grundgebühr: **1,50 €** | und | Gebühr pro Minute: 0,50 € |

Wie erkennt man die **Veränderung der Grundgebühr** im Funktionsgraphen?
Beschreibe kurz.

______________________________

b) Wie erkennt man die **Veränderung der Gebühr pro Minute** im Funktionsgraphen?
Beschreibe kurz.

______________________________

Stelle mit den Schiebereglern nun folgende Tarife ein und überprüfe deine Annahme.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Tarif ③ | Grundgebühr: 2,00 € | und | Gebühr pro Minute: **1,50 €** |
| Tarif ④ | Grundgebühr: 2,00 € | und | Gebühr pro Minute: **0,50 €** |

**Activity 5:**

(a) Reconstruct the following figures on grid paper.

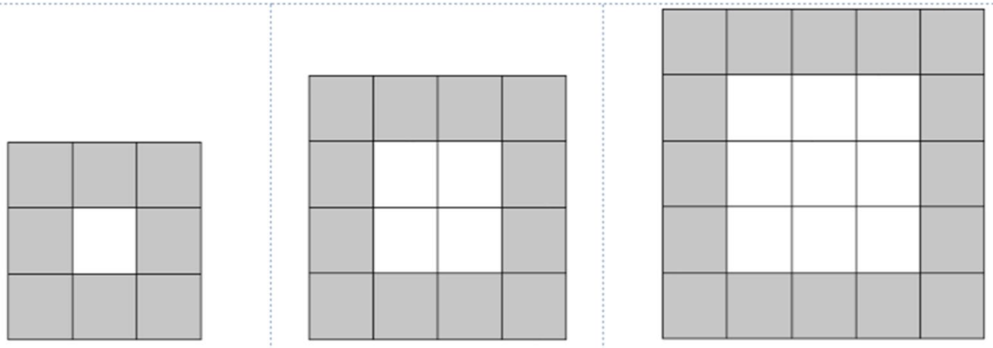


**Figure 1** **Figure 2** **Figure 3**

(b) Find the number of gray squares needed for Figure 4 and 5, without constructing them.

………………………………………………………………………………

(c) How many more gray squares are needed to construct each next figure?

………………………………………………………………………………

**Folien**

**Bestandteile der Module:**

- Handreichung
- Lernumgebung
- Begleitende Folien

# Beispiel Modul

**Aktivität (40 Minuten Partnerarbeit):**
Kennenlernen eines Moduls.

- Machen Sie sich mit der Handreichung vertraut.
- Bearbeiten Sie die Aufgaben in der Lernumgebung (Forscherheft).
- Beantworten Sie die folgenden Fragen:
  - Welches Vorwissen erwarten Sie für die Bearbeitung des Moduls?
  - Welche Lernziele werden mit diesem Modul / den verschiedenen Aufgaben verfolgt?
  - Welche Grundvorstellungen werden in diesem Modul adressiert?
  - Welche Darstellungsformen und -wechsel werden in dieser Lernumgebung fokussiert?

**Diskussion / Reflexion**

# Zusammenfassung: 5. Veranstaltung

- **Design Prinzipien**
    - ➢ Forschendes Lernen
    - ➢ Situiertheit
    - ➢ Embodiment
    - ➢ (Digitale) Werkzeuge
- **Vorstellung Modul**
    - ➢ Allgemein

**Lernziele:**

- ➢ Die vier Designprinzipien kennenlernen (später mehr).
- ➢ Den Aufbau der Module mit Handreichung und Lernumgebung kennen.
- ➢ Lernziele der Lernumgebungen identifizieren und mit den Grundvorstellungen verknüpfen können.

# Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und bis zum nächsten Mal!

# Funktionales Denken von Schülerinnen und Schülern fördern – Spezifische Lernumgebungen erkunden und (weiter-)entwickeln

6. Sitzung:

(Digitale) Werkzeuge, Lernumgebung Gehgraphen

Ute Sproesser
Kerstin Frey

# Agenda: 6. Veranstaltung

- **Auseinandersetzung mit Modul *Gehgraphen***
  - ➢Einführung mit praktischer Erprobung
  - ➢Analyse von Unterrichtssituationen und Reflexion mit Fokus auf (digitalen) Werkzeugen
- **(Digitale) Werkzeuge**
  - ➢Als Designprinzip
  - ➢Experimente mit gegenständlichen und digitalen Werkzeugen zur Förderung des funktionalen Denkens

**Lernziele:**

➢ Das Designprinzip (digitale) Werkzeuge im Kontext des Moduls *Gehgraphen* vertieft kennenlernen.

➢ Schüler- und Lehrerhandeln in Bezug auf (digitale) Werkzeuge und die Entwicklung des funktionalen Denkens analysieren.

➢ Einblicke in den aktuellen Forschungsstand zu Experimenten mit realen und digitalen Werkzeugen zur Förderung des funktionalen Denkens erhalten.

# Modul *Gehgraphen*

Teaser Video Gehgraphen anschauen
→ Webseite

# Modul *Gehgraphen*

**Aktivität (40 Minuten Gruppenarbeit):**

Erkunden Sie mit Hilfe der Materialien die Lernumgebung Gehgraphen.

Behalten Sie die folgenden Fragen im Hinterkopf:

- Was sind die Lernziele der Lernumgebung und der einzelnen Aufgaben?
- Welche Grundvorstellungen des funktionalen Denkens werden adressiert?
- Welches Vorwissen wird benötigt?
- Mit welchen Lernschwierigkeiten rechnen Sie?
- Wie unterstützen die eingesetzten Werkzeuge den Lernprozess?

**Gruppe A:**
Bearbeiten Sie die Aktivitäten in folgender Reihenfolge (Bearbeitungszeit je etwa 10min):
- Gehgraphen gegenständlich (Sensor)
- Gehgraphen gegenständlich (webbasiert)
- Gehgraphen digital mit GeoGebra

**Gruppe B:**
Bearbeiten Sie die Aktivitäten in folgender Reihenfolge (Bearbeitungszeit je etwa 10min):
- Gehgraphen gegenständlich (webbasiert)
- Gehgraphen gegenständlich (Sensor)
- Gehgraphen digital mit GeoGebra

# Modul *Gehgraphen*

**Aktivität (40 Minuten Gruppenarbeit): →Diskussion / Reflexion**

Erkunden Sie mit Hilfe der Materialien die Lernumgebung Gehgraphen.

Behalten Sie die folgenden Fragen im Hinterkopf:

- Was sind die Lernziele der Lernumgebung und der einzelnen Aufgaben?
- Welche Grundvorstellungen des funktionalen Denkens werden adressiert?
- Welches Vorwissen wird benötigt?
- Mit welchen Lernschwierigkeiten rechnen Sie?
- Wie unterstützen die eingesetzten Werkzeuge den Lernprozess?

**Gruppe A:**
Bearbeiten Sie die Aktivitäten in folgender Reihenfolge (Bearbeitungszeit je etwa 10min):

- Gehgraphen gegenständlich (Sensor)
- Gehgraphen gegenständlich (webbasiert)
- Gehgraphen digital mit GeoGebra

**Gruppe B:**
Bearbeiten Sie die Aktivitäten in folgender Reihenfolge (Bearbeitungszeit je etwa 10min):

- Gehgraphen gegenständlich (webbasiert)
- Gehgraphen gegenständlich (Sensor)
- Gehgraphen digital mit GeoGebra

**Aktivität (10 Minuten Kleingruppenarbeit):**

Schauen Sie sich das Video an. Behalten Sie die folgenden Fragen im Hinterkopf und diskutieren Sie diese in Kleingruppen:

- Wie würden sie die Schülerantworten einordnen?
- Nehmen Sie Fehlvorstellungen bei den Schülern wahr?
- Welche Hilfestellungen/ Erklärungen könnten hilfreich sein, um das funktionale Denken der Schüler zu fördern?
- Was haben Sie sonst wahrgenommen?

# Modul *Gehgraphen*

Implementation Video Grahgraphen Ziczac anschauen

# Modul *Gehgraphen*

**Aktivität (10 Minuten Kleingruppenarbeit): →Diskussion**

Schauen Sie sich das Video an. Behalten Sie die folgenden Fragen im Hinterkopf und diskutieren Sie diese in Kleingruppen:

- Wie würden sie die Schülerantworten einordnen?
- Nehmen Sie Fehlvorstellungen bei den Schülern wahr?
- Welche Hilfestellungen/ Erklärungen könnten hilfreich sein, um das funktionale Denken der Schüler zu fördern?
- Was haben Sie sonst wahrgenommen?

# Modul *Gehgraphen*

**Aktivität (10 Minuten Kleingruppenarbeit):**

Schauen Sie sich das Video an. Behalten Sie die folgenden Fragen im Hinterkopf und diskutieren Sie diese in Kleingruppen:

- Wie würden sie die Schülerantworten für Schüler 1 und Schüler 2 einordnen?
- Nehmen Sie Fehlvorstellungen bei den Schülern wahr?
- Welche Hilfestellungen/ Erklärungen könnten hilfreich sein, um das funktionale Denken der Schüler zu fördern?
- Was haben Sie sonst wahrgenommen?

# Modul *Gehgraphen*

Implementation Video Grahgraphen Gruppenarbeit anschauen

**Aktivität (10 Minuten Kleingruppenarbeit):** **→Diskussion**

Schauen Sie sich das Video an. Behalten Sie die folgenden Fragen im Hinterkopf und diskutieren Sie diese in Kleingruppen:

- Wie würden sie die Schülerantworten für Schüler 1 und Schüler 2 einordnen?
- Nehmen Sie Fehlvorstellungen bei den Schülern wahr?
- Welche Hilfestellungen/ Erklärungen könnten hilfreich sein, um das funktionale Denken der Schüler zu fördern?
- Was haben Sie sonst wahrgenommen?

# Designprinzipien der Lernumgebungen

**FORSCHENDES LERNEN**

**SITUIERTHEIT**

**EMBODIMENT**

**(DIGITALE) WERKZEUGE**

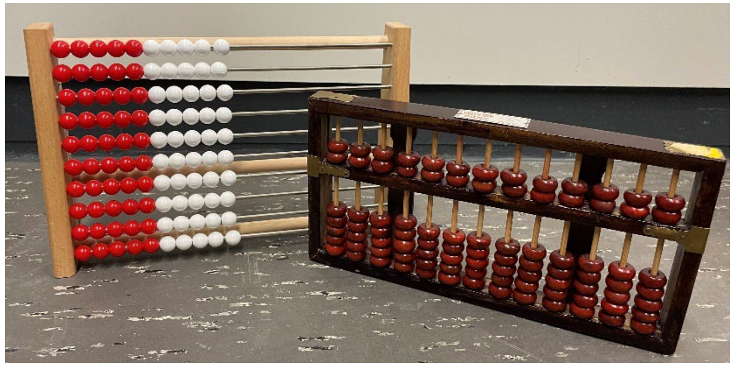
# Designprinzipien der Lernumgebungen

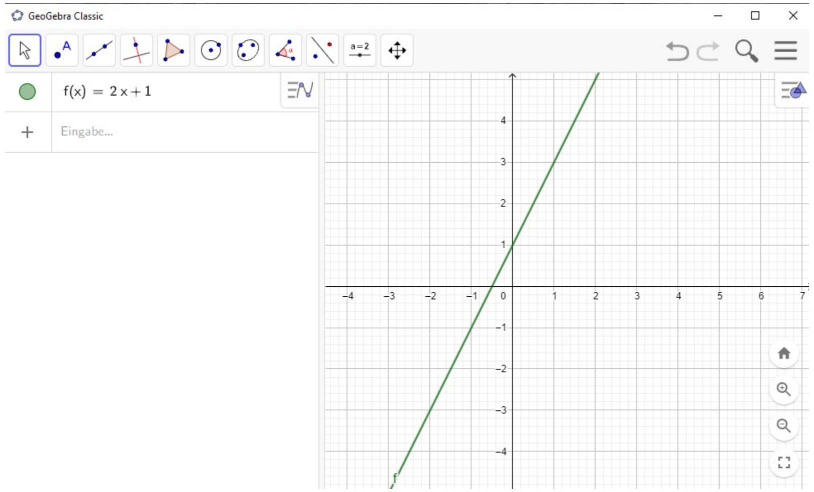
(DIGITALE) WERKZEUGE

# (Digitale) Werkzeuge

## Allgemeine Beschreibung

- Menschen nutzen schon immer Werkzeuge → diese schaffen neue Möglichkeiten und vereinfachen Tätigkeiten
- Ständige Weiterentwicklung von Werkzeugen → auch für kognitive Tätigkeiten, einschließlich der Mathematik (Monaghan et al., 2016)



# (Digitale) Werkzeuge

**Der Einsatz von (digitalen) Werkzeugen im Mathematikunterricht geht mit Erleichterungen und Einschränkungen einher:**

- (Digitale) Werkzeuge verändern Mathematikaufgaben (Hoyles, 2018)
- Zusammenspiel zwischen den (digitalen) Werkzeugen und dem Mathematiklernen (Drijvers, 2019)
- Viel Literatur verfügbar, jedoch ist vieles noch unbekannt (Drijvers, 2019)

**Ständige Frage:**

Wie können digitale Werkzeuge eingesetzt werden, um das Mathematiklernen zu fördern?

# (Digitale) Werkzeuge

## Dimensionen

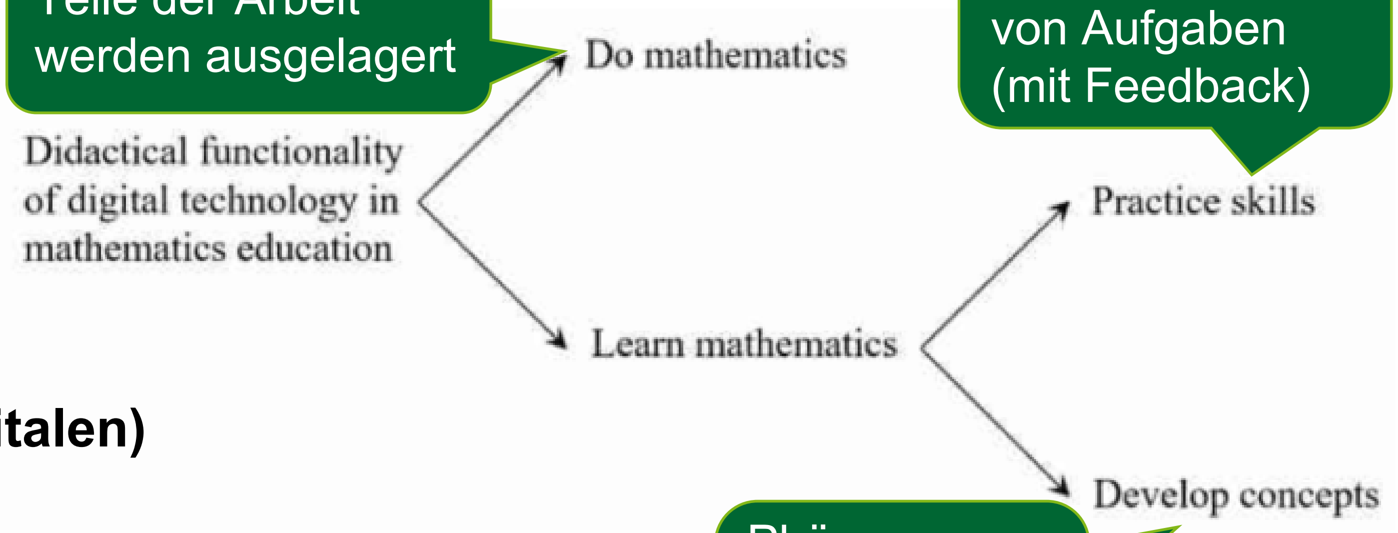
- **Eingeschränkte und/oder spezifische Funktionen vs. universell einsetzbare Werkzeuge**
- **Mathematische Inhaltsbereiche**

eng miteinander verknüpft

- **Didaktische Funktionen**
  - ➢ Aufgabenart
  - ➢ Lehr- und Lernprozess

Teile der Arbeit werden ausgelagert

Variation & Randomisierung von Aufgaben (mit Feedback)




Phänomene entdecken & Konzepte entwickeln

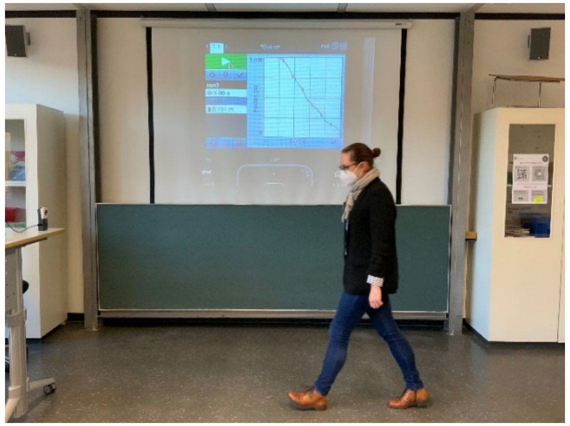
**Wichtig für den Einsatzu von (digitalen) Werkzeugen**

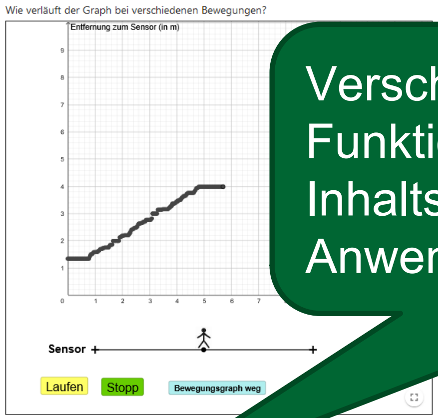
Drijvers, 2019, Vision Document FunThink Project

# (Digitale) Werkzeuge

**Aktivität (10 Minuten Partnerarbeit):**

Wie lassen sich die Dimensionen (allgemeine Funktionalität, Mathematischer Inhaltsbereich, didaktische Funktion) auf die Lernumgebung Gehgraphen übertragen?






Verschiedene spezifische Funktionen in unterschiedlichen Inhaltsbereichen, Lernen und Anwenden von Mathematik

**Sensor und Programm:**

- Sensor und Programm: eingeschränkte und spezifische Funktionen, Entwicklung von Konzepten

**GeoGebra:**

- Hier: spezifische Funktion in einem mathematischen Inhaltsbereich, Entwicklung von Konzepten

# Experimente mit (digitalen) Werkzeugen zur Förderung des Funktionalen Denkens

**Einsatz von gegenständlichen und digitalen Materialien zur Förderung des Funktionalen Denkens in Experimenten:**

**Einige Argumente für Experimente mit gegenständlichen Materialien**

- Funktionales Denken wird erlebbar (Ludwig & Oldenburg, 2007)
- Verknüpfung Realität & Mathematik (Vom Hofe, 2003)
- Entwicklung eigenständiger Konzepte (Barzel & Ganter, 2010)
- Förderung Zuordnungsvorstellung, Rückbezug zur Realität; Sicht auf Zusammenhang ist eher statisch (Lichti, 2019)

**Einige Argumente für Experimente mit digitalen Materialien**

- Systematische Variation einfach umsetzbar (Roth, 2008)
- Multi-Repräsentations-System direkt verfügbar (Balacheff & Kaput, 1997)
- Lernzuwächse sign. höher als mit gegenständl. Materialien (Lichti, 2019)
- Förderung Kovariationsvorstellung, Bezug zum Graphen; Sicht auf Zusammenhang ist eher dynamisch (Lichti, 2019)

# Experimente mit (digitalen) Werkzeugen zur Förderung des Funktionalen Denkens

## Argumente für Experimente mit gegenständlichen & digitalen Materialien

**Fokus auf Zuordnung**

- Wertepaare fokussieren Zuordnung (Hoffkamp, 2012)
- Wertetabelle betont punktweises Lesen (Weigand, 1988)
- Statische Sichtweise kann Kovariation behindern (Johnson, 2015)

**Fokus auf Kovariation**

- Schwierig für Lernende, unterentwickelt (Malle, 2000)
- Lokale Sicht nicht ausreichend (Leinhardt et al., 1990)
- Qualitative Annäherung an Funktionen (Stellmacher, 1986)

**Beste Effekte: Kombination beider Ansätzen**
(Digel et al., in press)

# Experimente mit (digitalen) Werkzeugen zur Förderung des Funktionalen Denkens

## Argumente für Experimente mit gegenständlichen & digitalen Materialien

**Zentrale Ergebnisse der Studie von Digel et al. (in Druck)**

- Simulationen sollen Experimente mit gegenständlichen Materialien ergänzen
  - Förderung Zuordnung durch gegenständliches Experiment
  - Förderung Kovariation insbesondere durch qualitative Simulation
  - Diskurs über Kovariation wesentlich für Lernzuwachs
  - Kovariation auch für Lernende auf niedrigen Kompetenzniveaus zugänglich
- Digitale Umgebungen sollen in Paper-Pencil-Umgebung eingebettet sein
  - Protokollieren unterstützt Reflexion
  - Bessere Verfügbarkeit des Paper-Pencil-Protokolls

# Modul Gehgraphen

**Aktivität (10 Minuten Kleingruppenarbeit): →Diskussion**
Reflektieren sie die eingesetzten digitalen Werkzeuge in diesem Modul. Tauschen Sie sich in Kleingruppen aus und notieren Sie Ihre wichtigsten Gedanken.

# Zusammenfassung: 5./6. Veranstaltung

- **Besprechung Schülerlösungen Optimaler Tarif**
- **Auseinandersetzung mit Modul *Gehgraphen***
  - ➢ Einführung mit praktischer Erprobung
  - ➢ Analyse von Unterrichtssituationen und Reflexion mit Fokus auf (digitalen) Werkzeugen
- **(Digitale) Werkzeuge**
  - ➢ Als Designprinzip
  - ➢ Experimente mit gegenständlichen und digitalen Werkzeugen zur Förderung des funktionalen Denkens

**Lernziele:**

➢ Das Designprinzip (digitale) Werkzeuge im Kontext des Moduls Graphengehen vertieft kennenlernen.

➢ Einblicke in den aktuellen Forschungsstand zu Experimenten mit realen und digitalen Werkzeugen zur Förderung des funktionalen Denkens erhalten.

➢ Schüler- und Lehrerhandeln in Bezug auf (digitale) Werkzeuge und die Entwicklung des funktionalen Denkens analysieren.

# Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und bis zum nächsten Mal!

# Funktionales Denken von Schülerinnen und Schülern fördern – Spezifische Lernumgebungen erkunden und (weiter-)entwickeln

7. Sitzung:

Situiertheit, Lernumgebung Zahlengerade

Ute Sproesser
Kerstin Frey

# Agenda: 7. Veranstaltung

- **Auseinandersetzung mit Modul *Zahlengerade* und *Entfernung-Zeit (turtle)***
  - ➢ Einführung mit praktischer Erprobung
- **Situiertheit**
  - ➢ Als Designprinzip

**Lernziele:**

- ➢ Das Designprinzip Situiertheit im Kontext der Module *Zahlengerade* und *Entfernung-Zeit (turtle)* vertieft kennenlernen.
- ➢ Exemplarische Einblicke in die Förderung des funktionalen Denkens durch die vorgestellten Lernumgebungen erhalten.

# Situiertheit

**Hintergrund:**

**Ursprung:** Hans Freudenthal (1905-1990) schlägt den Begriff der didaktischen Phänomenologie vor.

**Mathematik als menschliche Tätigkeit:**

> „Was die Menschen lernen müssen, ist Mathematik nicht als ein geschlossenes System, sondern als eine Tätigkeit, der Prozess der Mathematisierung der Realität und wenn möglich sogar der Mathematisierung der Mathematik.“
>
> (Freudenthal, 1968, S. 7, eigene Übersetzung)

**Folge:**

**Annahme: Wissen ist situiert.**
→ Es manifestiert sich in alltäglichen Aktivitäten.
→ Es ist ein Ergebnis unseres Handeln.
→ Es entsteht im Kontext und in der Kultur, in der es entwickelt und verwendet wird.
(Brown, Collins, & Duguid, 1989, S. 32)

# Situiertheit

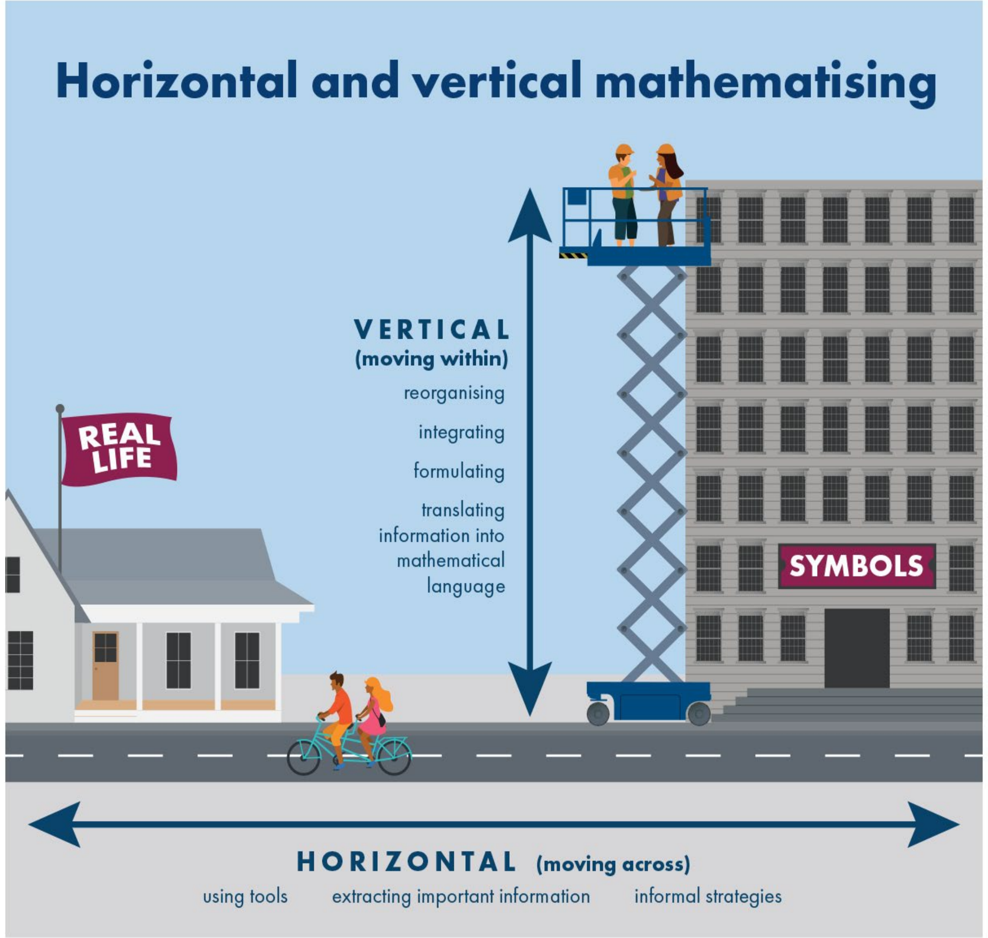



Bild: Majewska, D. (2019) Adapted from Tressler (1978), Freudenthal (1991) & Barnes (2005)

## Mathematisierung

### Horizontale Mathematisierung

- "Übersetzung" eines realen Kontextes in ein mathematisches Modell

### Vertikale Mathematisierung

- "Übersetzung" eines mathematischen Modells in die mathematische Sprache - abstrakte Betrachtung des Modells
- Änderung der Darstellung, Lösungsmethoden, Reorganisation von Informationen, ...

(Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P., 2020)

# Situiertheit

***Schüleraufgabe:***

**Angebot Taxi 1:**
Jede Fahrt kostet 5€ und 0,30€ pro km.

**Angebot Taxi 2:**
Jede Fahrt nur 3 € und 0,50€ pro km.

Vergleiche die beiden Angebote. Nach welcher Entfernung (km) sind beide Angebote gleich teuer?

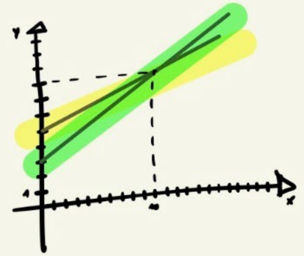
***Schülerlösung:***

Taxi 1: 5 € je Fahrt
0,30 € je km
$y = 0{,}3x + 5$

Taxi 2: 3 € je Fahrt
0,50 € je km
$y = 0{,}5x + 3$

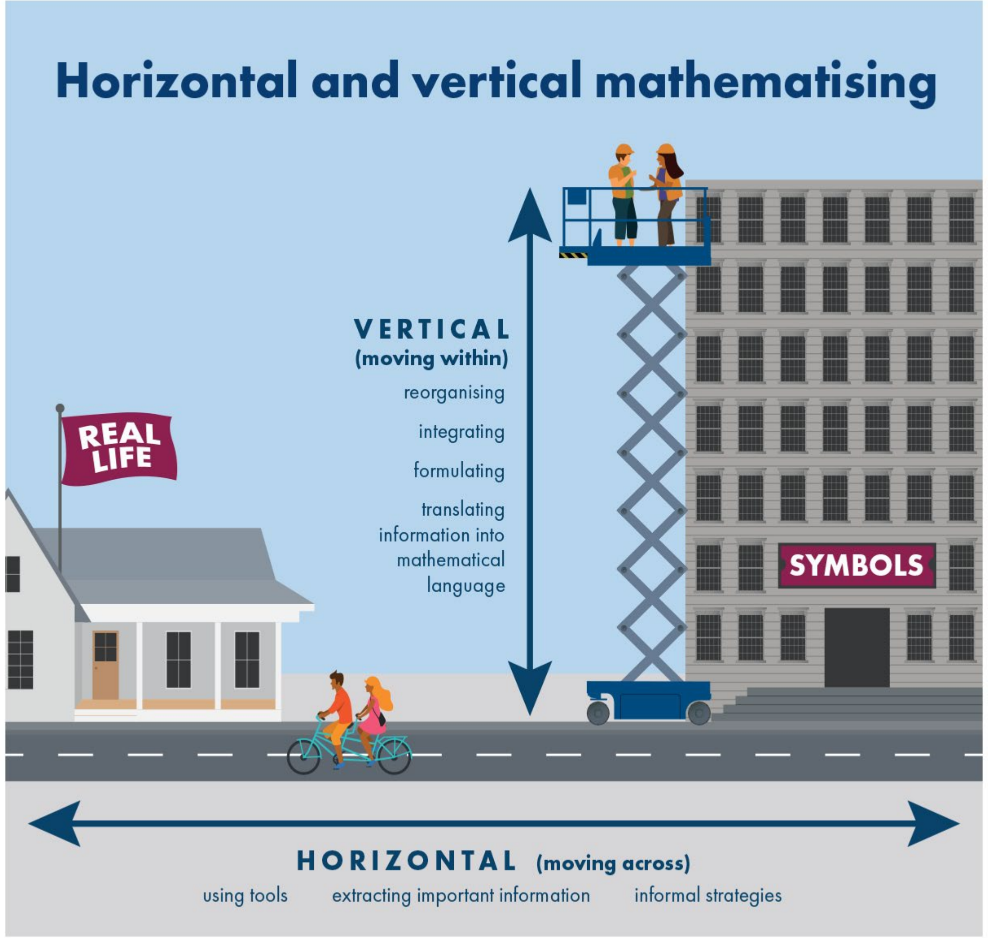
$y = 0{,}3x + 5$ ①
$y = 0{,}5x + 3$ ②

① - ②: $0 = -0{,}2x + 2$
$x = 10$



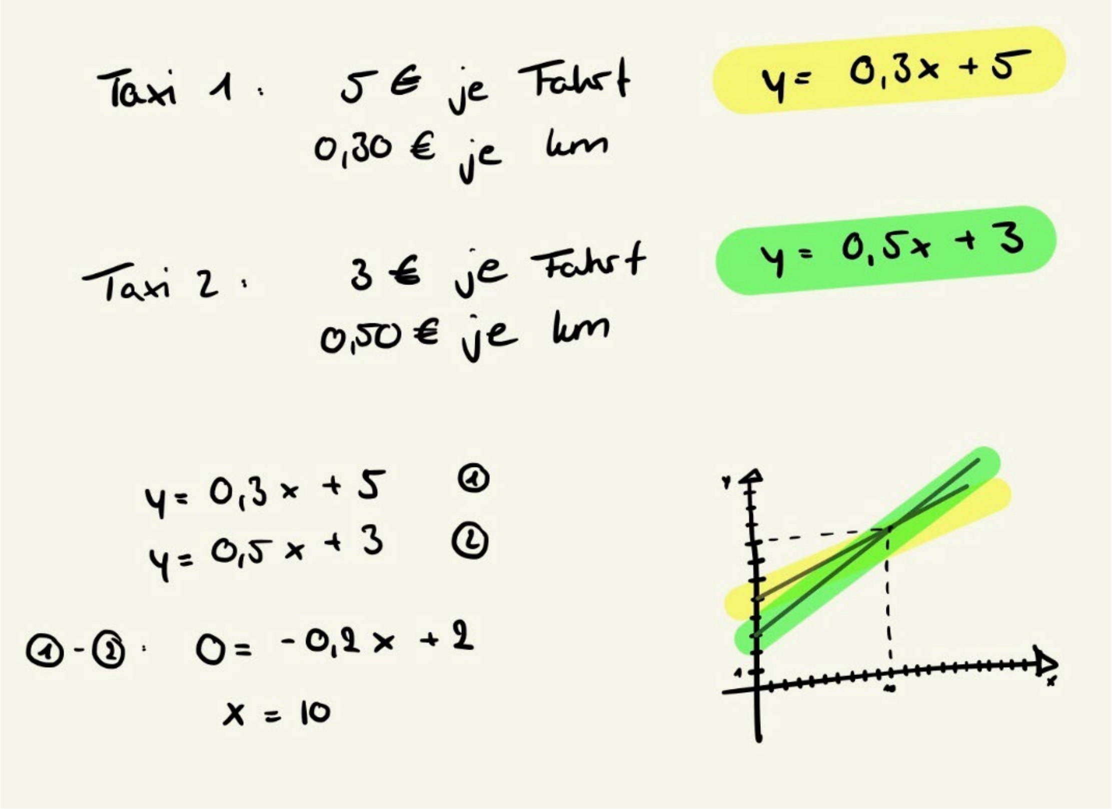

**Aktivität (5 Minuten Kleingruppenarbeit):**
Identifizieren Sie in Kleingruppen horizontale und vertikale Mathematisierungsprozesse in der gegebenen Aufgabe.

# Situiertheit



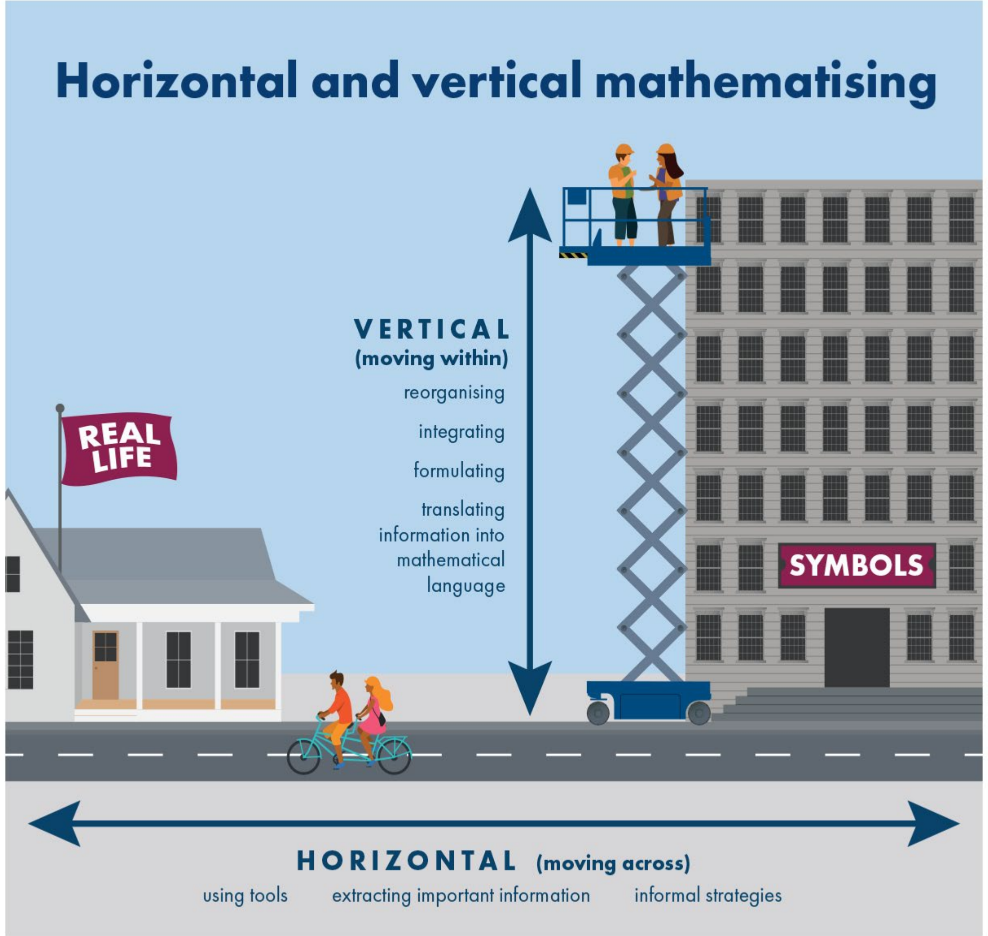

Adapted from Tressler (1978), Freudenthal (1991) & Barnes (2005)

Majewska, D. (2019)




**Aktivität (5 Minuten Kleingruppenarbeit):**
Identifizieren Sie in Kleingruppen horizontale und vertikale Mathematisierungsprozesse in der gegebenen Aufgabe.

# Situiertheit

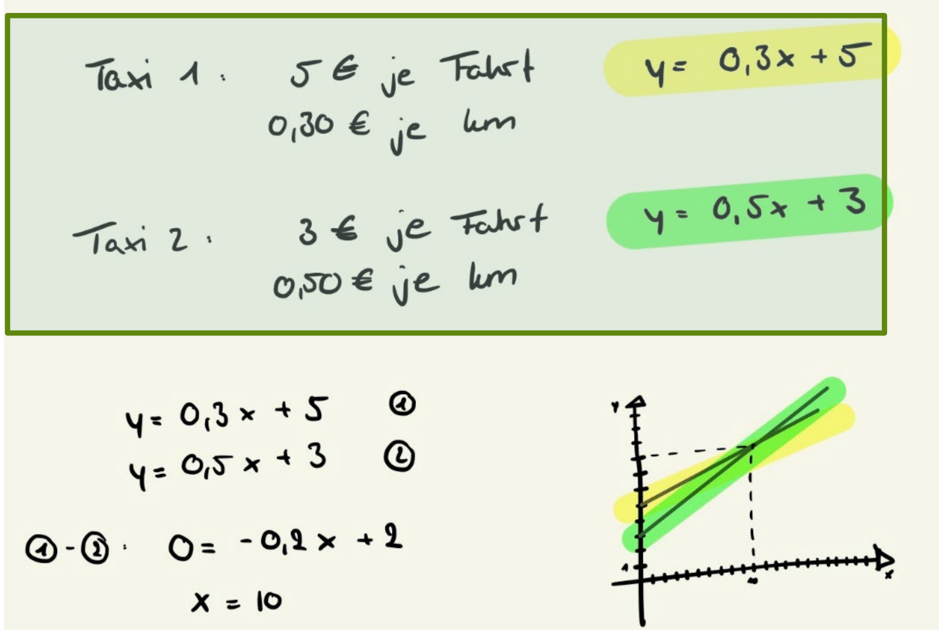



Adapted from Tressler (1978), Freudenthal (1991) & Barnes (2005)

Majewska, D. (2019)

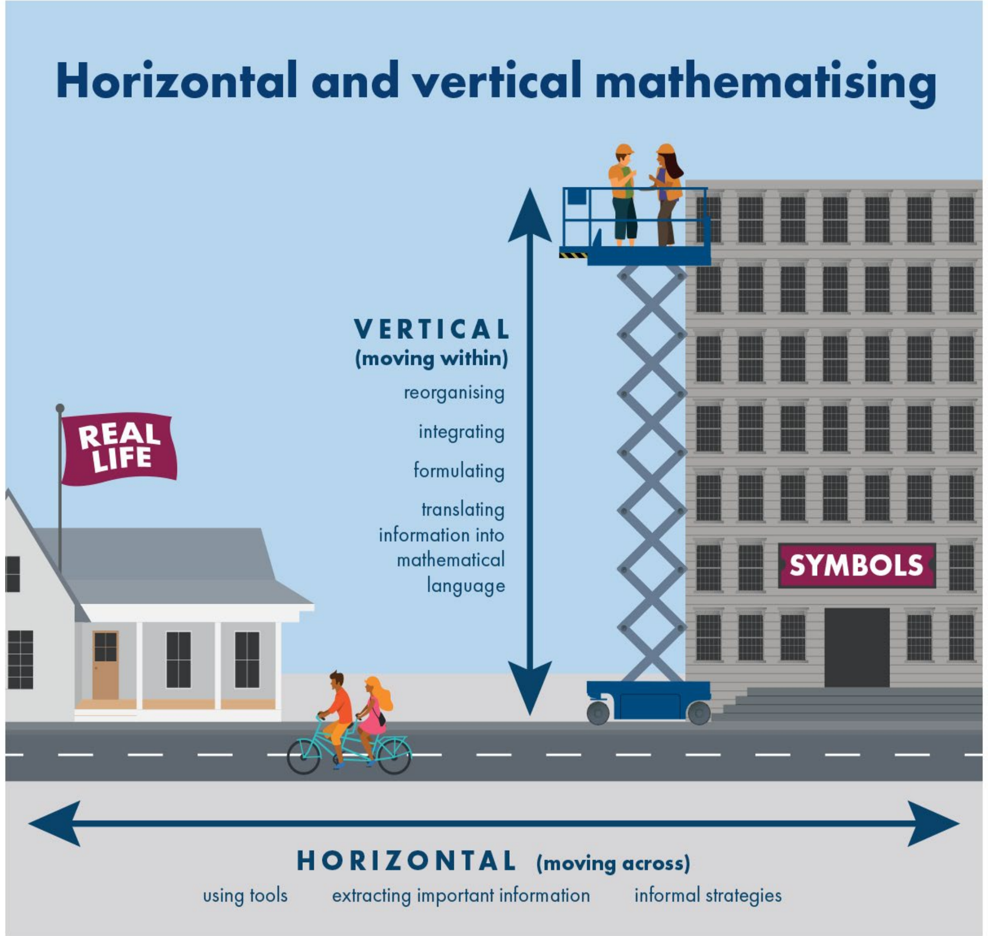
***Schüleraufgabe:***
Nach welcher Entfernung (km) sind beide Angebote gleich teuer?

***Schülerlösung:***




**Aktivität (5 Minuten Kleingruppenarbeit): →Besprechung**
Identifizieren Sie in Kleingruppen horizontale und vertikale Mathematisierungsprozesse in der gegebenen Aufgabe.

## Situiertheit




Adapted from Treffler (1978), Freudenthal (1991) & Barnes (2005)

Majewska, D. (2019)

***Schüleraufgabe:***
Nach welcher Entfernung (km) sind beide Angebote gleich teuer?

***Schülerlösung:***

Taxi 1: 5 € je Fahrt
0,30 € je km

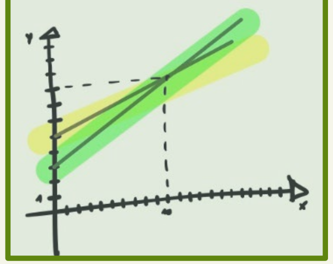
Taxi 2: 3 € je Fahrt
0,50 € je km

$y = 0{,}3x + 5$ ①
$y = 0{,}5x + 3$ ②

①-②: $0 = -0{,}2x + 2$
$x = 10$

$y = 0{,}3x + 5$

$y = 0{,}5x + 3$



**Aktivität (5 Minuten Kleingruppenarbeit): →Besprechung**
Identifizieren Sie in Kleingruppen horizontale und vertikale Mathematisierungsprozesse in der gegebenen Aufgabe.

# Situiertheit

**Aktivität (40 Minuten Gruppenarbeit):**

Erkunden Sie mit Hilfe der Materialien die Lernumgebung *Zahlengerade* und *Entfernung-Zeit (turtle*).

Machen Sie sich dabei Gedanken zu folgenden Fragen:

- Was sind die Lernziele der Lernumgebung und welche Grundvorstellungen des funktionalen Denkens werden adressiert?
- Welches Vorwissen wird benötigt?
- Mit welchen Lernschwierigkeiten rechnen Sie?
- Finden Mathematisierungsprozesse statt und wenn ja, welche?
- Inwieweit sind die bearbeiteten Aktivitäten situiert?

**Gruppe A:**
Bearbeiten Sie die Aktivitäten in folgender Reihenfolge (Bearbeitungszeit je etwa 20 min):
- *Zahlengerade*
- *Entfernung-Zeit (turtle)*

**Gruppe B:**
Bearbeiten Sie die Aktivitäten in folgender Reihenfolge (Bearbeitungszeit je etwa 20 min):
- *Entfernung-Zeit (turtle)*
- *Zahlengerade*

# Situiertheit

**Aktivität (40 Minuten Gruppenarbeit): →Besprechung**

Erkunden Sie mit Hilfe der Materialien die Lernumgebung *Zahlengerade* und *Entfernung-Zeit (turtle*).

Machen Sie sich dabei Gedanken zu folgenden Fragen:

- Was sind die Lernziele der Lernumgebung und welche Grundvorstellungen des funktionalen Denkens werden adressiert?
- Welches Vorwissen wird benötigt?
- Mit welchen Lernschwierigkeiten rechnen Sie?
- Finden Mathematisierungsprozesse statt und wenn ja, welche?
- Inwieweit sind die bearbeiteten Aktivitäten situiert?

**Gruppe A:**
Bearbeiten Sie die Aktivitäten in folgender Reihenfolge (Bearbeitungszeit je etwa 20 min):

- *Zahlengerade*
- *Entfernung-Zeit (turtle)*

**Gruppe B:**
Bearbeiten Sie die Aktivitäten in folgender Reihenfolge (Bearbeitungszeit je etwa 20 min):

- *Entfernung-Zeit (turtle)*
- *Zahlengerade*

# Situiertheit

**Aktivität:**

Erkunden Sie weiteren Lernumgebungen: *Double Number Line* und *Function Machine.*

Machen Sie sich dabei Gedanken zu folgenden Fragen:

- Was sind die Lernziele der Lernumgebung und welche Grundvorstellungen des funktionalen Denkens werden adressiert?
- Welches Vorwissen wird benötigt?
- Mit welchen Lernschwierigkeiten rechnen Sie?
- Finden Mathematisierungsprozesse statt und wenn ja, welche?
- Inwieweit sind die bearbeiteten Aktivitäten situiert?

**Entwickeln Sie weitere Aktivitäten zu einer der oben genannten Lernumgebungen.**

# Zusammenfassung: 7. Veranstaltung

- **Auseinandersetzung mit Modul *Zahlengerade* und *Entfernung-Zeit (turtle)***
  - Einführung mit praktischer Erprobung
- **Situiertheit**
  - Als Designprinzip

**Lernziele:**

- Das Designprinzip Situiertheit im Kontext der Module *Zahlengerade* und *Entfernung-Zeit (turtle)* vertieft kennenlernen.
- Exemplarische Einblicke in die Förderung des funktionalen Denkens durch die vorgestellten Lernumgebungen erhalten.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und bis zum nächsten Mal!

# Funktionales Denken von Schülerinnen und Schülern fördern – Spezifische Lernumgebungen erkunden und (weiter-)entwickeln

## 8. Sitzung:

## Embodiment, Lernumgebung Nomogramme

Ute Sproesser
Kerstin Frey

# Agenda: 8. Veranstaltung

- **Besprechung Aktivität *Double Number Line* und *Function Machine***
- **Embodiment**
  - ➢ Als Designprinzip
  - ➢ Auseinandersetzung mit Modul Nomogramme

**Lernziele:**

- ➢ Das Designprinzip Embodiment im Kontext des Moduls *Nomogramme* vertieft kennenlernen.
- ➢ Einblick in Nomogramme als Darstellungsform erhalten.

# Situiertheit

**Aktivität: →Besprechung**

Erkunden Sie weiteren Lernumgebungen: *Double Number Line* und *Function Machine.*

Machen Sie sich dabei Gedanken zu folgenden Fragen:

- Was sind die Lernziele der Lernumgebung und welche Grundvorstellungen des funktionalen Denkens werden adressiert?
- Welches Vorwissen wird benötigt?
- Mit welchen Lernschwierigkeiten rechnen Sie?
- Finden Mathematisierungsprozesse statt und wenn ja, welche?
- Inwieweit sind die bearbeiteten Aktivitäten situiert?

**Entwickeln Sie weitere Aktivitäten zu einer der oben genannten Lernumgebungen.**

https://embodieddesign.sites.uu.nl/activity/

## Allgemeine Einstiegsbeispiele

**Aktivität (10 Minuten Einzelarbeit):**

Öffnen Sie die Webseite und bearbeiten Sie die Aufgaben.

1. Bewegen Sie die Punkte (oder den Punkt) bis die Feedbackfunktion grün leuchtet.
2. Finden Sie weitere Punkte-Paare, bei denen die Feedbackfunktion grün leuchtet.
3. Versuchen Sie die Feedbackfunktion grün zu halten. Bewegen Sie die Punkte dazu entsprechend. Bei manchen Beispielen kann dies etwas schwierig sein, es ist jedoch immer möglich!
4. Wenn Sie mit den Bewegungen vertraut sind: Was muss für die Zuordnung gelten, damit die Feedbackfunktion grün leuchtet?
5. Bearbeiten Sie die nächste Aufgabe.

**Machen Sie sich bewusst:**

- Welche Erfahrungen machen Sie während der Bearbeitung der Aufgaben?
- Didaktische Perspektive: Wie initiiert die Aufgabe das mathematische Lernen?
- Was sind die gemeinsamen Merkmale dieser Art von Design?

# Embodiment

**Allgemeine Beschreibung**
(Abrahamson, 2009; Barsalou, 1999; 2008; Shapiro &  Stolz, 2019)

- Die Theorie der Embodied Cognition besagt, dass Kognition nicht von den Wahrnehmungs- und Bewegungssystemen des Körpers getrennt werden kann.

D.h.: Die Kognition ist grundlegend mit Handlungen und Wahrnehmungen verwoben und von ihnen abhängig.

- Allgemeines Beispiel: Fahrradfahren Lernen
  - Schleifen zwischen Wahrnehmung und Bewegung
  - Reflexion nicht zentral, dennoch ist Kognition (unterbewusst) beteiligt
- Forschungsergebnisse: Wahrnehmungs- und Bewegungssysteme auch bei abstrakten Sachverhalten beteiligt
- Mathematikdidaktische Perspektive: Wie kann Wahrnehmung und Bewegung die Kognition im MU unterstützen?

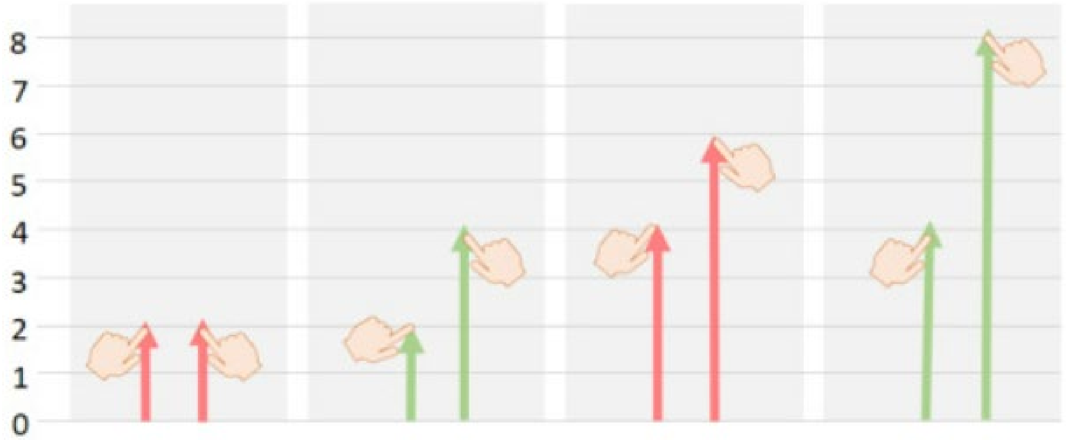
# Embodiment

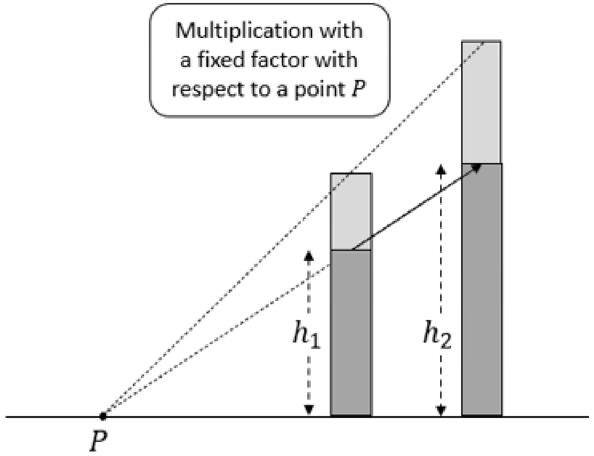
**Schritte bei der Nutzung von Embodiment in der mathematischen Bildung**
(Alberto et al., 2022)

**Ausgangspunkt:**
Motorisches Problem
**Ziel:**
Neue Bewegung / Koordination / … zu erlernen

**Reflexion:**
Eine Regel finden, die der neuen Bewegung / Koordination zugrunde liegt.

**Mathematisierung:**
Abstrahieren und Mathematisieren der gefundenen Regel / Bewegung



## Lernumgebung *Nomogramme* Teil 1: Erkundung

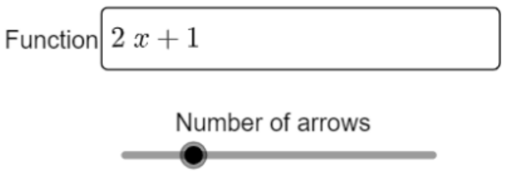
**Aktivität (10 Minuten Einzelarbeit):**

Erkunden Sie den ersten Teil der Lernumgebung *Nomogramme*.

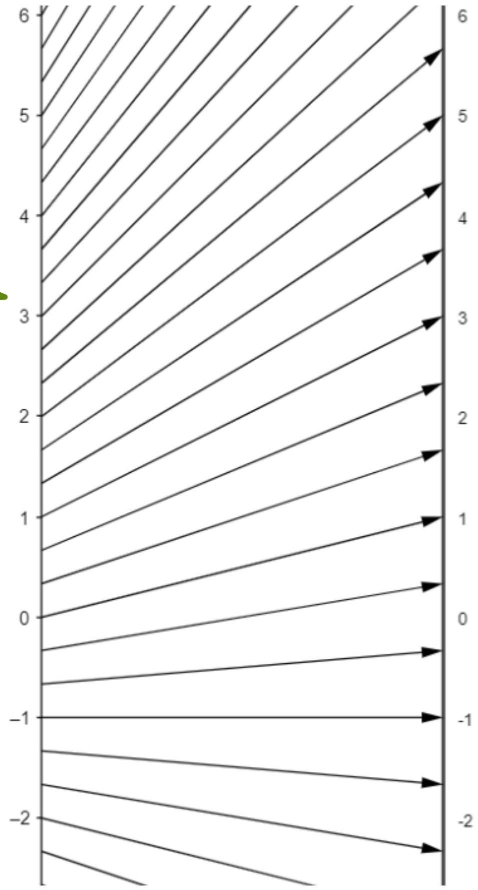
**Link:**
https://app.dwo.nl/embod/?responsive=true&locale=en&profile=108&hash=%23s%3A706362#s:706362

# Embodiment

## Lernumgebung *Nomogramme*




Pfeile von Eingabewert zum Ausgabewert



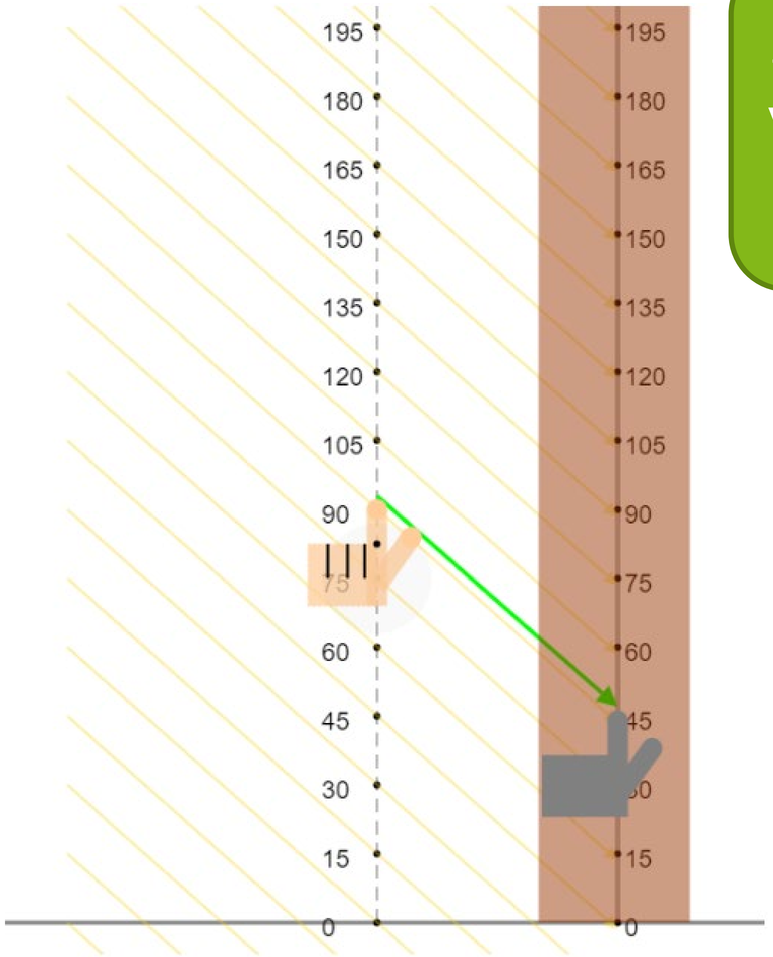

Nomogramme in Geogebra

https://www.geogebra.org/m/gh7zcw93

- Betonung Input-Output- Vorstellung
- Vorteilhaft für Visualisierung verschiedener Konzepte / Erkenntnisse
  - Bedeutung der Umkehrfunktion
  - Verkettung von Funktionen.
  - Visualisierung von allgemeinen Funktionseigenschaften wie Linearität, konstante Funktion, ...
  - Definitions- und Wertebereich: Intervall in dem die Pfeile starten bzw. ankommen

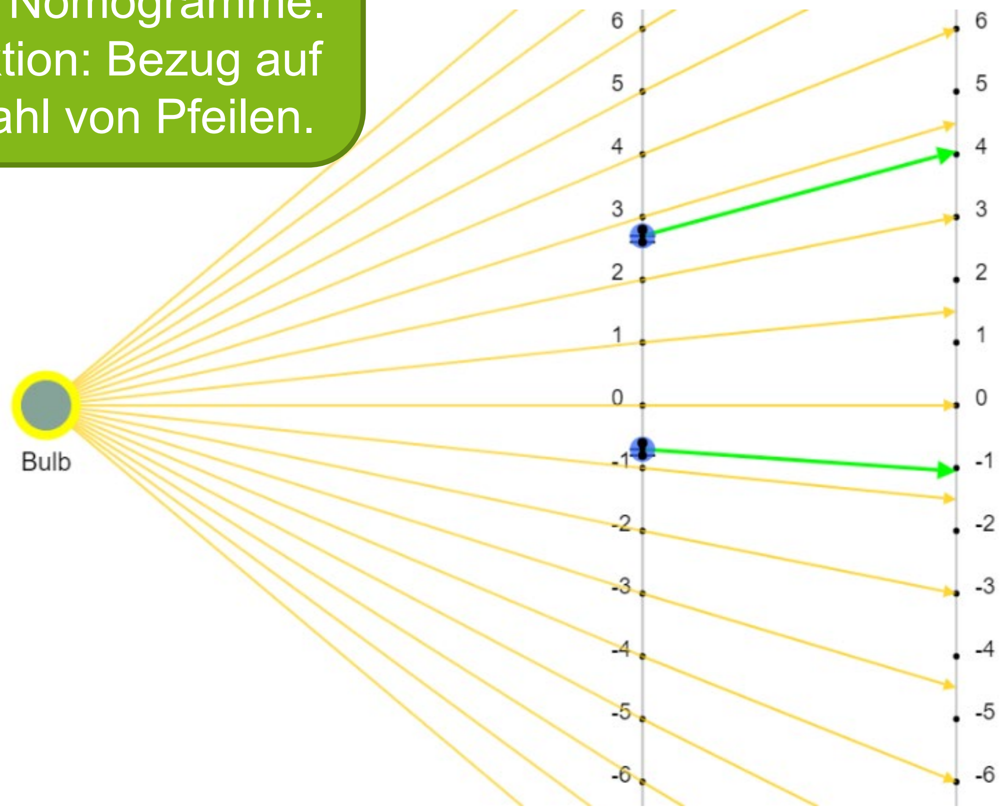
PH Ludwigsburg
University of Education

# Embodiment




Lichtstrahlen bieten einen Kontext für eine sinnvolle Entwicklung des Verständnisses für Nomogramme. Didaktische Reduktion: Bezug auf eine endliche Anzahl von Pfeilen.

## Lernumgebung *Nomogramme*



## Lernumgebung *Nomogramme* Teil 2: Aufgabendesign

**Aktivität (20 Minuten Partnerarbeit):**

Erkunden Sie in Zweiergruppen die folgenden Aufgaben zu Nomogrammen:

***Nomogramme***

***Nomogramme und Graphen***

**Links:**

https://app.dwo.nl/embod/?responsive=true&locale=en&profile=108&hash=%23s%3A706405#s:706405

https://app.dwo.nl/embod/?responsive=true&locale=en&profile=108&hash=%23s%3A706770#s:706770

**Überlegen Sie:**

- Welche Erfahrungen machen Sie während der Bearbeitung der Aufgaben?
- Didaktische Perspektive: Wie initiiert die Aufgabe das mathematische Lernen?
- Was sind die gemeinsamen Merkmale dieser Art von Design?

## Lernumgebung *Nomogramme* Teil 2: Aufgabendesign

**Aktivität (20 Minuten Partnerarbeit):**

Erkunden Sie in Zweiergruppen die folgenden Aufgaben zu Nomogrammen:

***Nomogramme***

***Nomogramme und Graphen***

**Links:**

https://app.dwo.nl/embod/?responsive=true&locale=en&profile=108&hash=%23s%3A706405#s:706405

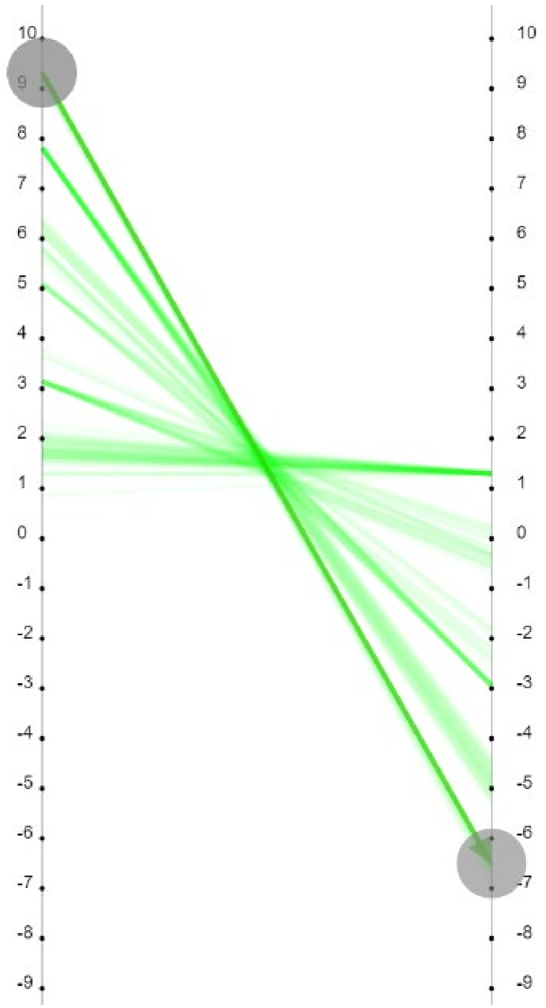
https://app.dwo.nl/embod/?responsive=true&locale=en&profile=108&hash=%23s%3A706770#s:706770

**Überlegen Sie: →Besprechung**

- Welche Erfahrungen machen Sie während der Bearbeitung der Aufgaben?
- Didaktische Perspektive: Wie initiiert die Aufgabe das mathematische Lernen?
- Was sind die gemeinsamen Merkmale dieser Art von Design?

# Embodiment

## Beschreibung Aufgabendesign




Zuerst (Aufgaben 1 – 4) qualitativ:
- Fokus auf der Bewegung
- “Wie werden die Punkte bewegt?”

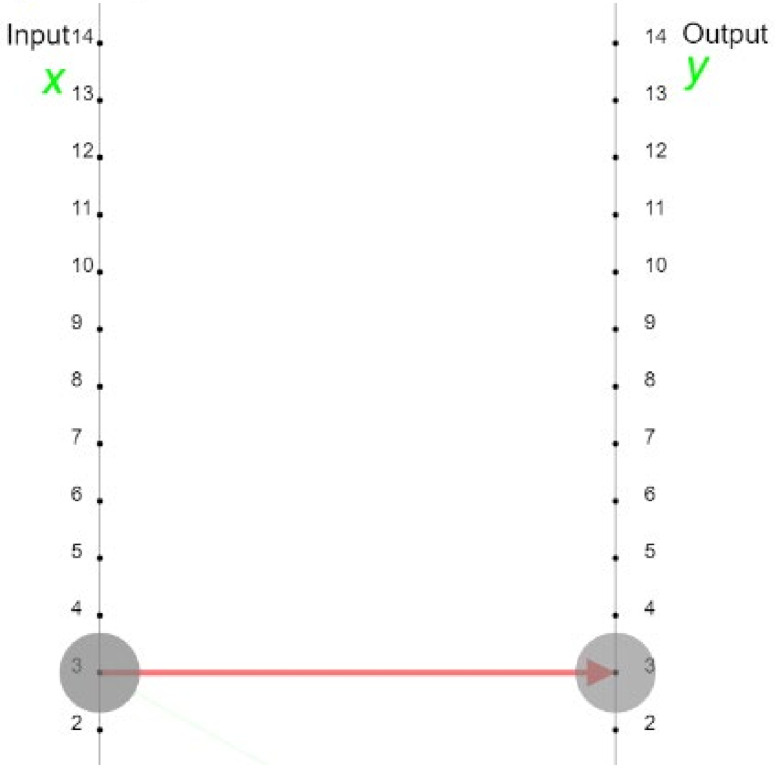
Dann quantitativ:
- Fokus auf Mathematisierung
- “Wie lautet die Regel?”

# Embodiment

## Beschreibung Aufgabendesign

Find the green arrows of the nomogram. We use *x* to represent the input numbers on the left number line, and *y* to represent the output numbers on the right number line. To check your answer, type your equation in the following box and press [enter].

*y* =

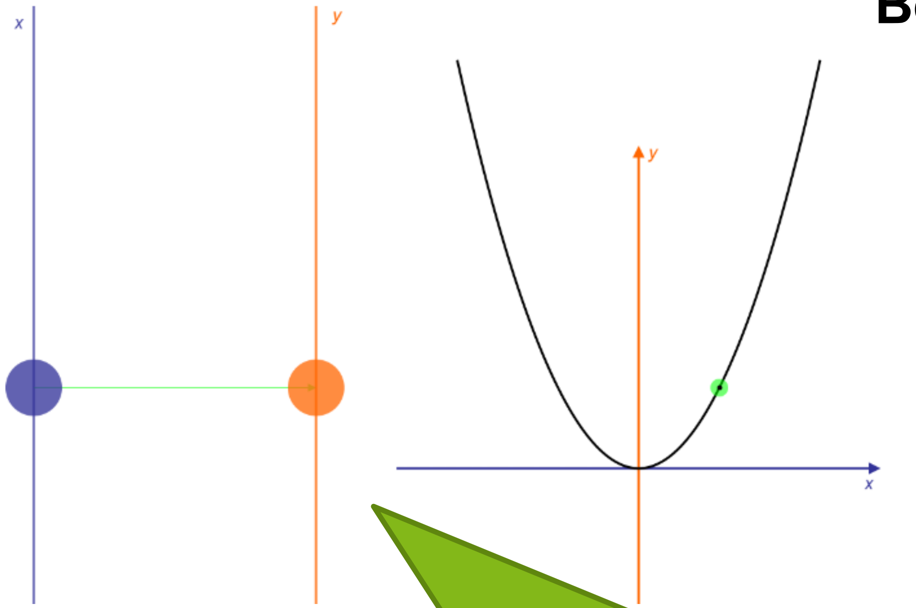


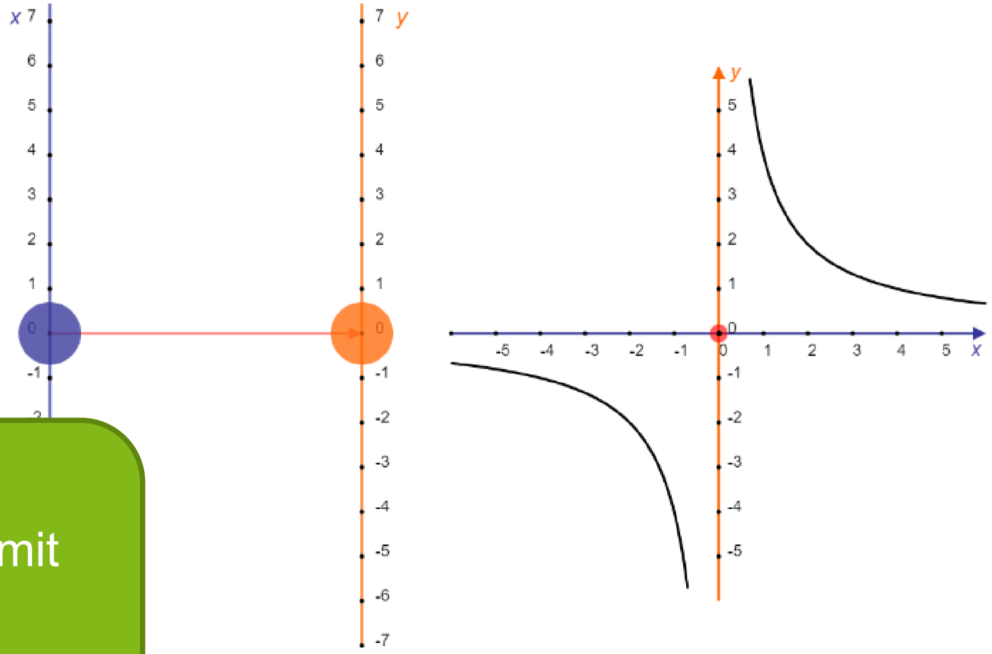

Abschluss:

- Fokus auf Formalisierung
- “Wie lautet die Funktionsgleichung?”

# Embodiment

## Beschreibung Aufgabendesign




- Darstellungswechsel zwischen Nomogrammen und Funktionsgraphen mit Schwerpunkt auf Kovariation.
- Gleicher Aufbau: zunächst qualitativ, dann quantitativ

# Embodiment

**Diskussion Aufgabendesign:**

- Erörtern Sie mögliche Gründe, warum sich der Entwickler der Aufgaben für diese Designs entschieden hat.
- Inwieweit können diese Aufgaben das funktionale Denken von Schülerinnen und Schülern fördern?
- Wie ist das Zusammenspiel zwischen Embodiment und funktionalem Denken? Inwieweit fördert und unterstützt Embodiment in diesen Aufgaben die Entwicklung des funktionalen Denkens?

# Zusammenfassung: 8. Veranstaltung

- **Besprechung Aktivität *Double Number Line* und *Function Machine***
- **Embodiment**
  - ➢ Als Designprinzip
  - ➢ Auseinandersetzung mit Modul Nomogramme

**Lernziele:**

- ➢ Das Designprinzip Embodiment im Kontext des Moduls *Nomogramme* vertieft kennenlernen.
- ➢ Einblick in Nomogramme als Darstellungsform erhalten.

# Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und bis zum nächsten Mal!

# Funktionales Denken von Schülerinnen und Schülern fördern – Spezifische Lernumgebungen erkunden und (weiter-)entwickeln

9. Sitzung:

Forschendes Lernen

Ute Sproesser
Kerstin Frey

# Agenda: 9. Veranstaltung

- **Forschendes Lernen (Inquiry-based learning)**
  - ➢ Als Designprinzip
  - ➢ Umsetzungsbeispiele

**Lernziele:**

- ➢ Das Designprinzip Forschendes Lernen im Kontext verschiedener Aufgaben vertieft kennenlernen.
- ➢ Mögliche Umsetzungen in Lernumgebungen erkunden und reflektieren.

# Forschendes Lernen

**Aktivität (Arbeitsblatt):**
Im Folgenden sehen Sie drei verschiedene Ansätze aus Schulbüchern zur Einführung von Potenzen.

1. Vergleichen Sie die verschiedenen didaktischen Ansätze. Berücksichtigen Sie insbesondere, inwieweit die Beispiele das Vorwissen von Schüler*innen einbeziehen.
2. Für welches Beispiel würden Sie sich entscheiden? Begründen Sie.

①

According to a legend, long ago in one of the kingdoms of ancient India there was a powerful and rich emperor named Velchib. A Brahmin priest, named Sissa, invented and offered as a present to the emperor, a chess. The emperor was so impressed and excited with the present to the emperor that he decided to offer him a gift. Velchib asked Sissa what present he wanted.

Sissa thought for a moment and replied "I want two grains of wheat in the first square, four in the second, eight in the third and so on…"

The emperor was puzzled and angry about the cheap gift that Sissa had asked for and ordered his storekeepers to give him the wheat he wanted. However, as things turned out he could not deliver his promise.

✓ Why couldn't the emperor deliver his promise?

Fill in the table:

| Square | Number of wheat grains | Result |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 |
| 2 | $2 \cdot 2$ | 4 |
| 3 | $2 \cdot 2 \cdot 2$ | |
| 4 | | |
| ⋮ | | |
| 8 | | |
| 10 | | |
| ⋮ | | |
| 32 | | |
| ⋮ | | |
| 64 | | |

✓ Explain your strategy

To produce this huge quantity of grains, which is actually a 20 - digit number, one has to plant the whole Earth 76 times!

It is said that the emperor, in order to avoid the insult for not keeping his promise, he was consulted by his advisors to ask Sissa to count all the grains. Something that would take forever!

②

## Powers & Exponents

Powers can be used to show repeated multiplication of the same number.

$$\underbrace{\overset{\text{Base}}{2}^{\overset{\text{Exponent}}{3}}}_{\text{Power}} = 2 \times 2 \times 2$$

This is read as "two **to the power of** three"

③

Use your calculator to complete the following table

| | Result | | Result |
|---|---|---|---|
| $2 \cdot 2$ | | $2^2$ | |
| $2 \cdot 2 \cdot 2$ | | $2^3$ | |
| $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ | | $2^4$ | |
| $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ | | $2^5$ | |
| $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ | | $2^6$ | |

(a) What do you observe?
(b) How can we express repeated multiplication of the same number? Provide examples.

(Athanasiou et al., 2016a, S. 47f & 2016b, S. 17)

# Forschendes Lernen

**Aktivität (Arbeitsblatt):**
Im Folgenden sehen Sie drei verschiedene Ansätze aus Schulbüchern zur Einführung von Potenzen.

1. Vergleichen Sie die verschiedenen didaktischen Ansätze. Berücksichtigen Sie insbesondere, inwieweit die Beispiele das Vorwissen von Schüler*innen einbeziehen.
2. Für welches Beispiel würden Sie sich entscheiden? Begründen Sie.

①

According to a legend, long ago in one of the kingdoms of ancient India there was a powerful and rich emperor named Velchib. A Brahmin priest, named Sissa, invented and offered as a present to the emperor, a chess. The emperor was so impressed and excited with the present to the emperor that he decided to offer him a gift. Velchib asked Sissa what present he wanted.

Sissa thought for a moment and replied "I want two grains of wheat in the first square, four in the second, eight in the third and so on…"

The emperor was puzzled and angry about the cheap gift that Sissa had asked for and ordered his storekeepers to give him the wheat he wanted. However, as things turned out he could not deliver his promise.

✓ Why couldn't the emperor deliver his promise?

Fill in the table:

| Square | Number of wheat grains | Result |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 2 |
| 2 | $2 \cdot 2$ | 4 |
| 3 | $2 \cdot 2 \cdot 2$ | |
| 4 | | |
| ⋮ | | |
| 8 | | |

To produce this huge quantity of grains, which is actually a 20 - digit number, one has to plant the whole Earth 76 times!

It is said that the emperor, in order to avoid

②

## Powers & Exponents

Powers can be used to show repeated multiplication of the same number.

Exponent

Base $\rightarrow 2^3 = 2 \times 2 \times 2$

Power

This is read as "two **to the power of** three"

③

Use your calculator to complete the following table

| | Result | | Result |
|---|---|---|---|
| $2 \cdot 2$ | | $2^2$ | |
| $2 \cdot 2 \cdot 2$ | | $2^3$ | |
| $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ | | $2^4$ | |
| $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ | | $2^5$ | |
| $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ | | $2^6$ | |

(a) What do you observe?
(b) How can we express repeated multiplication of the same number? Provide examples.

**Diskussion:**
Welche Ansätze ermöglichen forschendes Lernen? Wodurch?
Was zeichnet das forschende Lernen aus?

(Athanasiou et al., 2016a, S. 47f & 2016b, S. 17)

# Forschendes Lernen

**Forschendes Lernen im Mathematikunterricht**
(Christou et al., 2023)

- **Grundlage:**
  Eine Frage oder ein Problem für das Antworten durch Erkunden bzw. Untersuchungen gefunden werden können
- **Kontext:**
  Problemstellungen ergeben sich aus dem Alltag, der Geschichte, der Kunst oder der Wissenschaft
- **Unterrichtsgestaltung:**
  - Berücksichtigung beteiligter mathematischer Konzepte
  - Einbeziehung von Elementen, die das Forschen und Experimentieren unterstützen
  - Verwendung von angepasster Sprache
  - Nutzen von passenden Werkzeugen

# Forschendes Lernen

## Rolle der Lehrperson

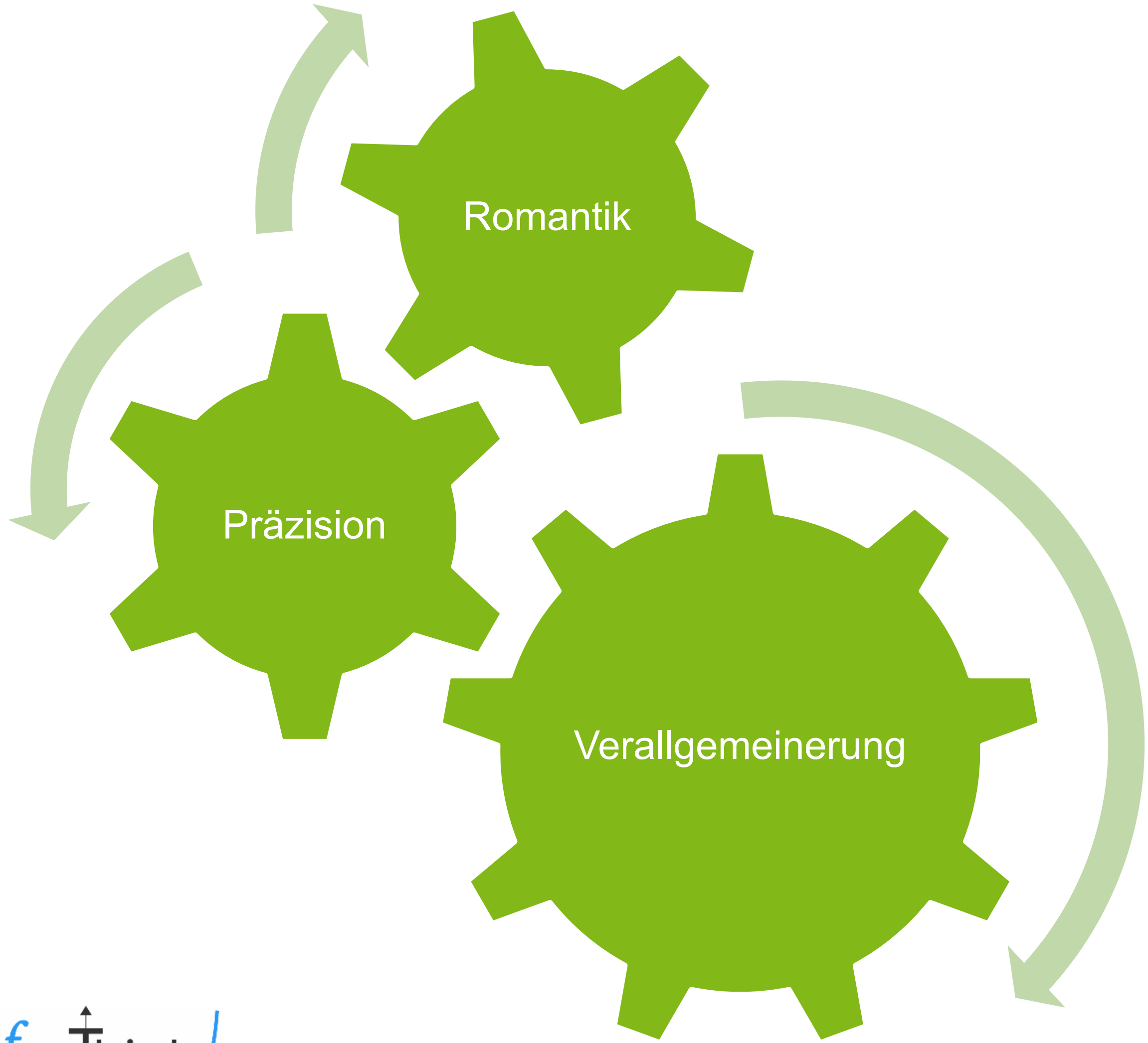
- Unterstützung der Schüler*innen bei …
  - Formulieren von Fragen
  - Nutzen des Vorwissens
  - Strukturierung bei der Entwicklung von Verständnis
- Anregung von Diskussionen

**Voraussetzung:** Aufgabenstellungen die das Forschende Lernen ermöglichen

(Dorier & Maass, 2020)

# Forschendes Lernen

**Phasen des Forschenden Lernens im Mathematikunterricht**
(Whitehead, 1929)



# Forschendes Lernen

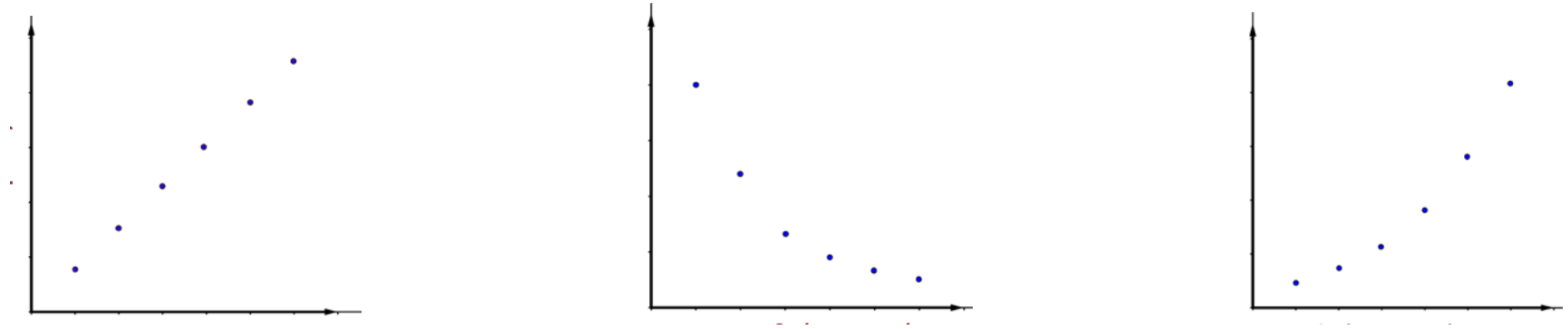
**Phase 1: Romantik**
(Christou et al., 2023)

- Wird mir der Idee des **Erkundens** eingeführt
- Schüler*innen lernen Objekte, Phänomene und Ideen durch Zuhören, Betrachten und Manipulieren eher beiläufig und unstrukturiert kennen (Evans, 1998)
- Neugierde für ein neues mathematische Konzept wird bei Schüler*innen geweckt
- Interesse wird erhalten, auf dessen Grundlage Fähigkeiten und Wissen zu entwickelt werden sollen

**Beispiel für Phase 1: Romantik**
(Athanasiou et al., 2016b, S. 116)

**Lernziel:** Die Schüler*innen erkennen antiproportionale Zuordnungen in Alltagssituationen.

**Aufgabe:** Eine Fabrik verfügt über eine bestimmte Anzahl an Maschinen mit der gleichen Produktionskapazität, die unabhängig voneinander betrieben werden. Der Produktionsleiter möchte die Produktion für einen bestimmten Auftrag mit einem festen Liefertermin planen. Der Verantwortliche hat die Möglichkeit, die Anzahl an produzierenden Maschinen zu variieren. Welches der folgenden Diagramme gibt die für die Ausführung des Auftrags benötigte Zeit in Abhängigkeit von der Anzahl der Maschinen an? Erläutern Sie.



Erkunden

# Forschendes Lernen

**Erkunden**
(Christou et al., 2023)

- Ermöglicht lebendige, spannende Lernangebote auf Grundlage eigener Erfahrungen
- Fördert das Verständnis für mathematische Inhalte durch die Identifizierung von Problemen und den Austausch darüber
- Fordert die Schüler*innen auf, über die gewählten Inhalte / Ideen zu reflektieren / diskutieren
  → Austausch / Reflektionen verändern das Denken
- Bietet den Schüler*innen Raum, eigene Überlegungen zu Problemen anzustellen und ihre eigenen Interessen mit realen Problemen zu verknüpfen
  → Förderung der Neugierde
- Bietet den Schüler*innen die Möglichkeit, Mathematik zu betreiben, die Welt durch eine mathematische Brille zu sehen und "Mathematiker zu sein" (vgl. auch Marshman et al., 2011)

# Forschendes Lernen

**Phase 2: Präzision**
(Christou et al., 2023; Evans, 1998)

- Schüler*innen entwickeln Kenntnisse und Fähigkeiten, die für die Entwicklung eines neuen Konzepts erforderlich sind
- Beinhaltet das Finden und Organisieren von konzeptuellen Strukturen, Regeln, etc.
- Wird durch **Erforschen** unterstützt
  - ➢ Beinhaltet das Bearbeiten von einer Vielzahl an Beispielen
  - ➢ Ausgehend vom Vorgehen in spezifischen Fällen werden Regeln generalisiert

**Beispiel für Erforschen in Phase 2 (Präzision)**

In GeoGebra sieht man ein Rechteck mit gleichbleibender Größe von $24cm^2$. Einer der Eckpunkte des Rechtecks ist der fixe Punkt O (0/0). Der gegenüberliegende Punkt ist der Punkt A.
Link: https://www.geogebra.org/m/kzktxmch

Bewege den Punkt A und fülle die Tabelle aus:

| Länge Seite a | Länge Seite b | Flächeninhalt Rechteck | Koordinaten von A (a/b) |
|---|---|---|---|
| 1 | | $24cm^2$ | |
| | 12 | $24cm^2$ | |
| | 8 | $24cm^2$ | |
| 4 | | $24cm^2$ | |
| | 3 | $24cm^2$ | |
| | 2 | $24cm^2$ | |

Erforschen

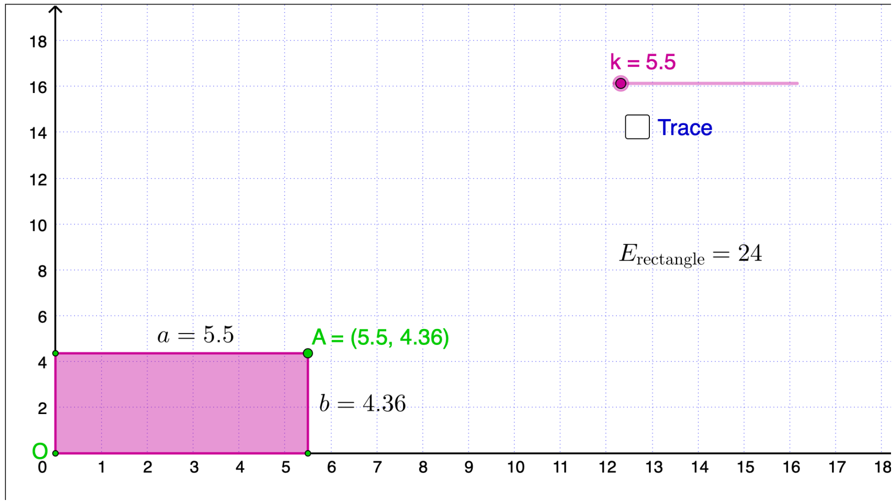
## Beispiel für Erforschen in Phase 2 (Präzision)

Ermitteln des Zusammenhangs zwischen den x- und y-Koordinaten des Punkts A (entsprechend den Seiten a und b des Rechtecks):

→Was kann man feststellen, wenn man verschiedene Werte von a und die zugeordneten Werte von b betrachtet?

Area of a rectangle

Author: Sotiris Loizias




Erforschen

# Forschendes Lernen

## **Phase 3: Verallgemeinerung**
(Christou et al., 2023)

- Mündet in der verständnisorientierten Entwicklung eines neues Konzepts und verhindert das Auswendiglernen
- Typische Aktivitäten: Vernetzen der neu erlernten Fähigkeiten mit Vorwissen, Anwenden in verschiedenen Kontexten, Verallgemeinern


Entwicklung neuer Konzepte / Kompetenzen

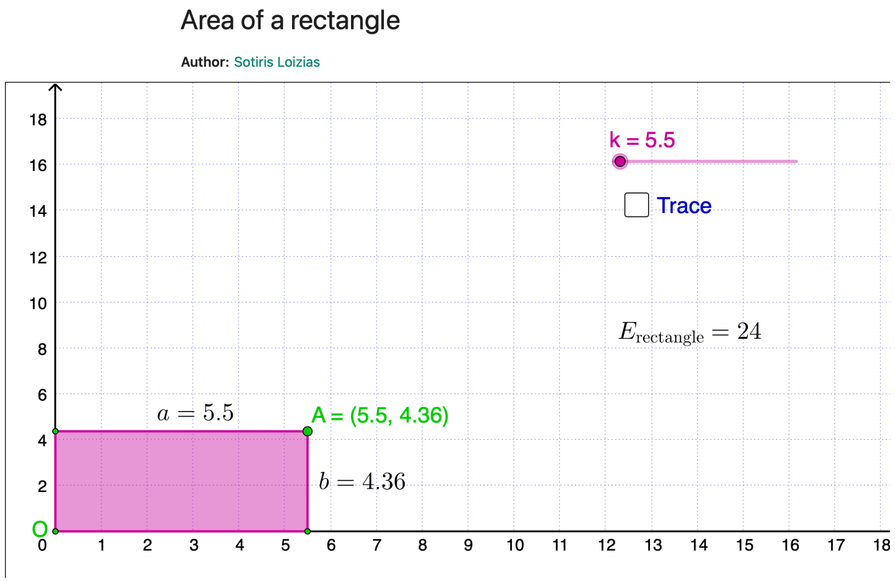
Rückkehr zur „Romantik“ in Bezug auf neue Konzepte

# Forschendes Lernen

## Beispiel für Phase 3: Verallgemeinerung

- Bewegen den Schieberegler k und Beobachtung der Veränderung der Koordinaten des Punktes A.
- Anzeigen der Spur durch Aktivieren von *trace.* Beschreiben des entstandenen Graphen.
- Beschreibung des Graphs einer antiproportionalen Zuordnung.

  → Wie lautet die entsprechende Funktionsgleichung?



# Forschendes Lernen

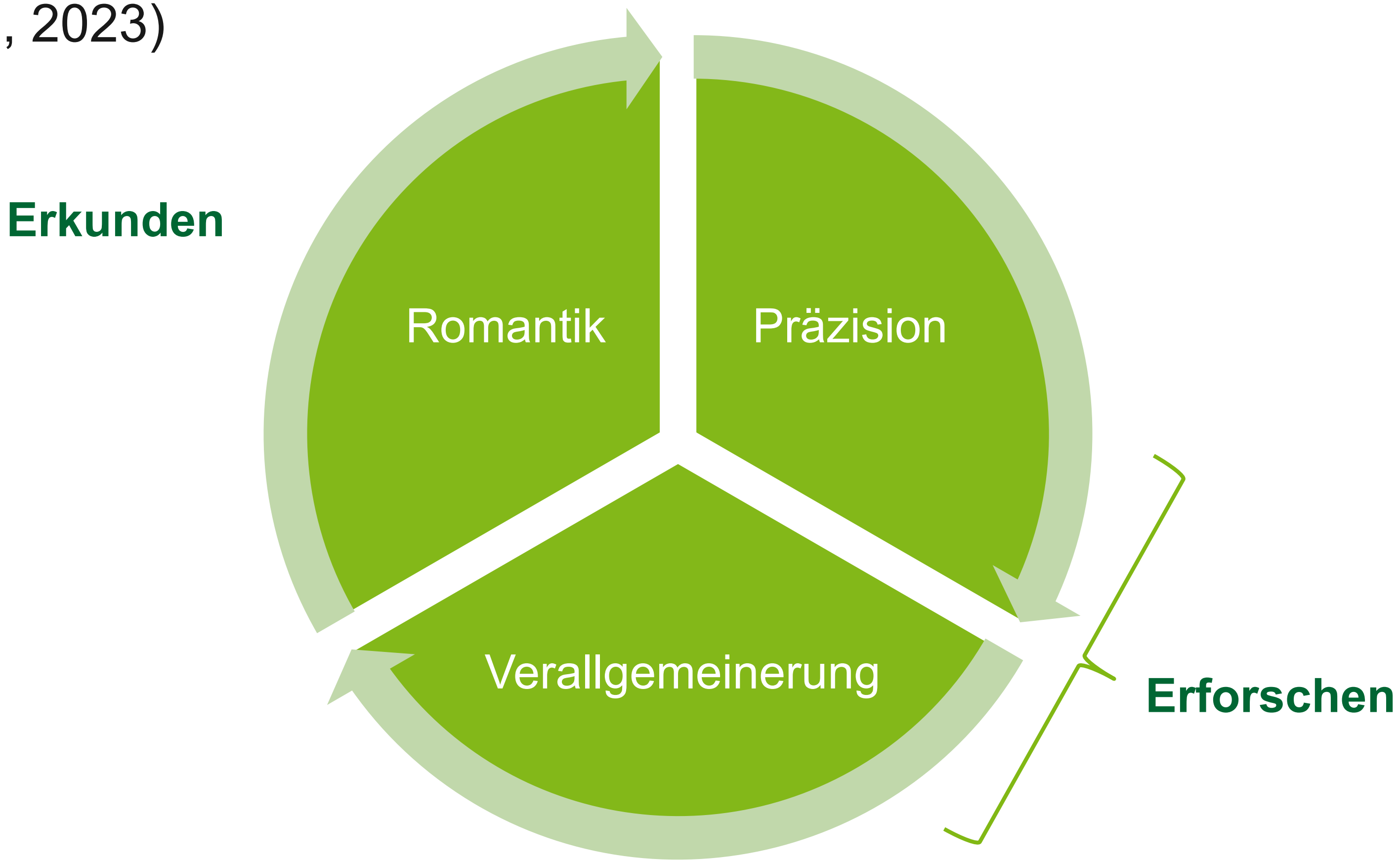
**Erforschen**
(Christou et al., 2023)

- Bezieht sich auf eine Aktivität, die ihren Ursprung in der Mathematik oder in der realen Welt hat und sich für eine Untersuchung eignet
- Beinhaltet das Stellen von Fragen, das Sammeln von Daten, das Aufstellen von Hypothesen, das Reflektieren und das Ziehen von Schlussfolgerungen.

  → Diese Prozesse finden individuell, in Kleingruppen und in der Klasse als Ganzes statt
- Die während der Erkundung geweckte Neugierde kann befriedigt werden
- Im Laufe der Untersuchung entwickeln die Schüler*innen Fähigkeiten, die auf andere Probleme angewendet werden können.

  → Erweiterung ihrer Kenntnisse und Fähigkeiten.

**Lernprozess beim Forschenden Lernen im Mathematikunterricht**
(Christou et al., 2023)



# Forschendes Lernen

**Aktivität Unterrichtsbeispiel (15 min Einzelarbeit / Plenum)**:

Schauen Sie sich die Unterrichtssequenz an und bearbeiten Sie die folgenden Fragen:

1. Inwieweit unterstützen die Aktivität und Diskussion das Forschende Lernen? Begründen Sie!
2. Wie könnte das Forschende Lernen weiter gefördert werden?

Teaser Video Patterns anschauen

# Forschendes Lernen

**Aktivität (15 min Kleingruppenarbeit):**
Entwickeln sie eine Aufgabe, die Forschendes Lernen ermöglicht zu folgendem Lernziel, :

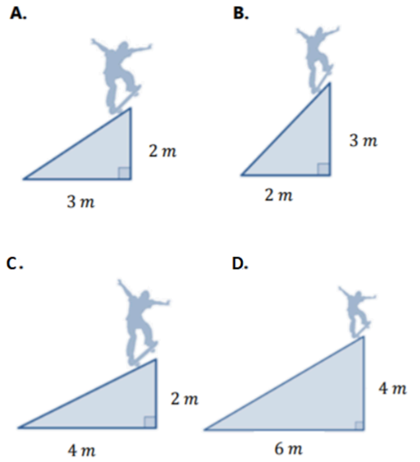
Schüler*innen der 8. Klasse verstehen die Steigung einer Geraden als Änderungsverhalten. Einführung des Steigungsdreiecks.

Überlegen Sie sich zunächst eine passende Situation. Die folgende GeoGebra-Anwendung kann genutzt und angepasst werden: https://www.geogebra.org/classic/mvvajgsr

# Beispiel: Das Steigungskonzept
(Athanasiou et al., 2016b, S. 64)

**Exploration**

Students are practicing their skateboarding skills at one of the four different ramps shown below.




The coach advised the beginner skateboarders to choose the ramp that is less steep for safety reasons.

- ✓ Find out which ramp is the most suitable and justify your answer.

Romantik

**Beispiel: Das Steigungskonzept**
(Athanasiou et al., 2016b, S. 65)

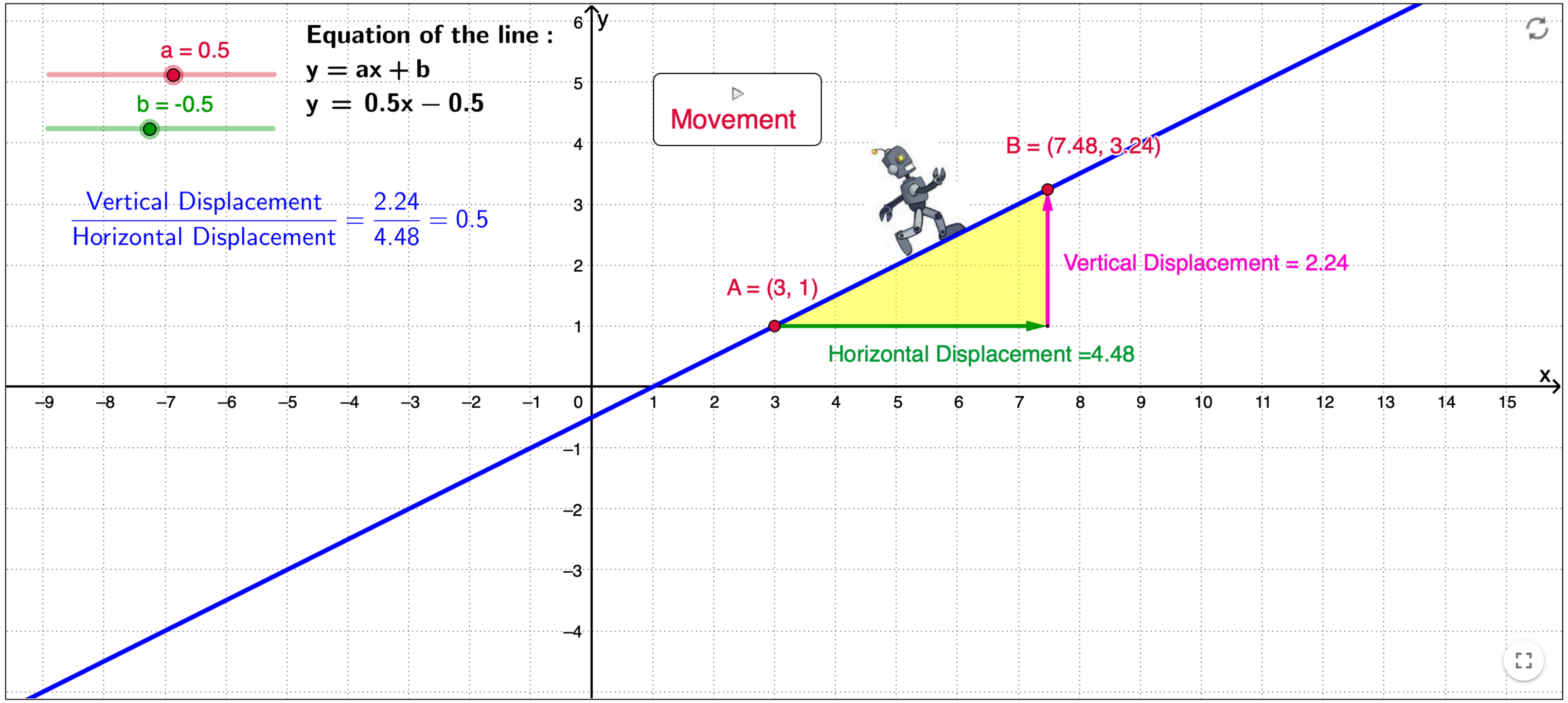
✓ Select point *A* and then change the coordinates of point *B*, so that the robot moves one unit to the right (horizontal change). Calculate the vertical shift of the above movement. Consider whether this applies to any starting point *A*.

✓ If the robot moves from point *A* to two units to the right, how large will the vertical change be? Does this apply to any starting point *A*?

✓ What do you think will be the vertical change if it moves from point *A*, 5 units to the right? Check your answer with the use of the app.

**Präzision**

## Beispiel: Das Steigungskonzept
(Athanasiou et al., 2016b, S. 65)




**Präzision: Erforschen**

Link: https://www.geogebra.org/m/rrqucyde

## Beispiel: Das Steigungskonzept

Die Schüler*innen finden eine allgemein gültige Regel zur Berechnung der Steigung mit Hilfe von zwei Punkten auf der Geraden.

- ✓ Consider the ratio $\frac{vertical\ change}{horizontal\ change}$ for any two points $A$ and $B$ of the line.
- o Change the cursors $\alpha$ and $\beta$ and observe how the ratio $\frac{vertical\ change}{horizontal\ change}$ relates with the equation of the line.

**Verallgemeinerung**

Athanasiou et al., 2016b, S. 65

# Zusammenfassung: 9. Veranstaltung

- **Forschendes Lernen (Inquiry-based learning)**
  - ➢ Als Designprinzip
  - ➢ Umsetzungsbeispiele

**Lernziele:**

- ➢ Das Designprinzip Forschendes Lernen im Kontext verschiedener Aufgaben vertieft kennenlernen.
- ➢ Mögliche Umsetzungen in Lernumgebungen erkunden und reflektieren.

# Forschendes Lernen

**Aktivität (Hausaufgabe):**

Wie kann Funktionales Denken bereits vor der Einführung des Funktionsbegriffs entwickelt werden?

# Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und bis zum nächsten Mal!

# Funktionales Denken von Schülerinnen und Schülern fördern – Spezifische Lernumgebungen erkunden und (weiter-)entwickeln

10. Sitzung:

Entwicklung des Funktionalen Denkens im Verlauf der Schulzeit; Curricula

Ute Sproesser
Kerstin Frey

# Agenda: 10. Veranstaltung

- **Input: Entwicklung des Funktionalen Denkens im Verlauf der Schulzeit**
- **Aktivität: Funktionales Denken in Grundschulbüchern**
- **Funktionales Denken im Bildungsplan BW und in internationalen Curricula**
- **Analyse von Schulbuchaufgaben im Kontext des Funktionalen Denkens**

**Lernziele:**

- ➢ Die Entwicklung des Funktionalen Denkens als (lebens-)langen Prozess erkennen.
- ➢ Grundschulaufgaben zur Förderung des Funktionalen Denkens identifizieren.
- ➢ Aussagen aus Curricula kennen, die auf das Funktionale Denken fokussieren.
- ➢ Schulbuchaufgaben in Bezug auf das Funktionale Denken bewerten und ggf. verbessern können.

# Entwicklung Funktionalen Denkens

**Aktivierung (15 min Partnerarbeit):**

Wie kann Funktionales Denken bereits vor der Einführung des Funktionsbegriffs entwickelt werden?

**Einblicke in Experteninterviews**
(vgl., Frey et al., in Druck; Sproesser & Frey, in Druck)

„Und hab dann so überlegt, wo habe ich das im Matheunterricht eigentlich und kam dann so auf diese starken Päckchen, die ich ja sehr liebe. Wo dann die Kinder eben, (..) sag ich mal die erste Zahl verändert sich so, die zweite Zahl verändert sich so, wie wird sich mein Ergebnis verändern bei der Addition. Das man dann auch auf das gegensinnige Verändern kommt und bei der Subtraktion auf das gleichsinnige Verändern, da denke ich mal da hab ich es mal verankert.“ G9

„…ich finde einbinden ist ja schwierig weil es ja eigentlich eine Denkweise sein soll, die auch durchgängig quasi und überall mit adressiert wird so wie das algebraischen Denken im Prinzip auch. Das heißt ich müsste eigentlich als Lehrkraft ständig die Augen offen halten dafür, wo sind Aspekte auf die ich jetzt eben auch so gucken kann.“ G1

„…kann ich jetzt ganz stark fokussieren, wenn ich jetzt zum Beispiel Musterfolgen mache oder Zahlenfolgen oder sonstige Dinge, da kann ich natürlich dann ganz bewusst Folgen adressieren oder ich kann denken wenn ich Tabellen, also das so klassische, wo es auch im Lehrplan oder in den Bildungsstandard mit gemeint ist, da kann ich funktionales Denken adressieren. Aber rein theoretisch müsste ich tatsächlich ja überall schon immer die Augen offen halten und überall schon funktionales Denken anregen, indem ich die Kinder neugierig mache: Wie kann es weitergehen? Wie kann ich hier verändern? Also so ein bisschen Kovariationsdenken überall reinsehen.“ G9

**Entwicklung des Funktionalen Denkens als (lebens-)langer Prozess**

- Funktionale Zusammenhänge aus dem Alltag, z.B.
  - Inhalt einer Bonbontüte an 3 / 4 / 5 /… Kinder verteilen
  - Preis eines Eis je nach Anzahl der Kugeln

**Entwicklung des Funktionalen Denkens als (lebens-)langer Prozess**

- Funktionale Zusammenhänge aus dem Alltag, z.B.
- Erkennen & Fortsetzen von Mustern in Alltag und Grundschule

(vgl. Blanton et al., 2015, S. 66)

# Entwicklung Funktionalen Denkens

**Entwicklung des Funktionalen Denkens als (lebens-)langer Prozess**

- Funktionale Zusammenhänge aus dem Alltag, z.B.
- Erkennen & Fortsetzen von Mustern in Alltag und Grundschule

$5 + 5 = 10$
$6 + 4 = 10$
$7 + 3 = 10$
$8 + 2 = 10$
$9 + 1 = 10$

$2 + 6 =$
$3 + 6 =$
$4 + 6 =$
$5 + 6 =$

$6 + 1 = 7$
$8 + 3 = 11$
$2 + 7 = 9$
$9 + 5 = 14$
$4 + 4 = 8$

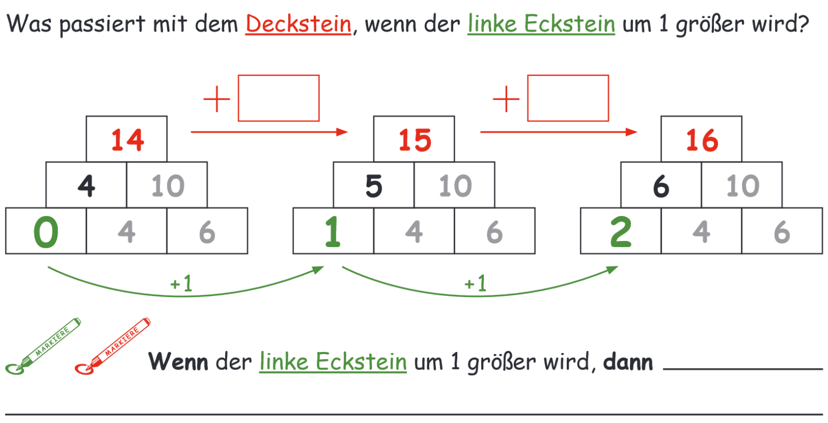
**Aktivität (Murmelphase):**
Was haben diese Aufgaben mit Funktionalem Denken zu tun?
Bewerten Sie die drei „Päckchen“!

[https://kira.dzlm.de/node/137; 11.5.2022]

# Entwicklung Funktionalen Denkens

## Entwicklung des Funktionalen Denkens als (lebens-)langer Prozess

- Funktionale Zusammenhänge aus dem Alltag, z.B.
- Erkennen & Fortsetzen von Mustern in Alltag und Grundschule




[https://pikas.dzlm.de/unterricht/gute-aufgaben/zahlen-und-operationen/zahlenmauern; 8.7.2022]

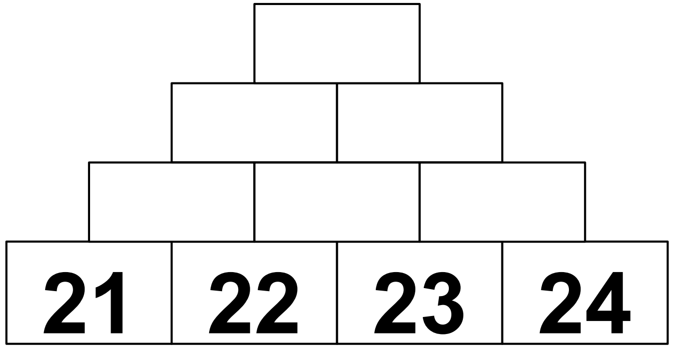
**Aktivität (Murmelphase):**

Was haben diese Aufgaben mit Funktionalem Denken zu tun?

## Entwicklung des Funktionalen Denkens als (lebens-)langer Prozess

- Funktionale Zusammenhänge aus dem Alltag, z.B.
- Erkennen & Fortsetzen von Mustern in Alltag und Grundschule

### Ideen für Zahlenmauern in der Sekundarstufe




**Arbeitsaufträge:**

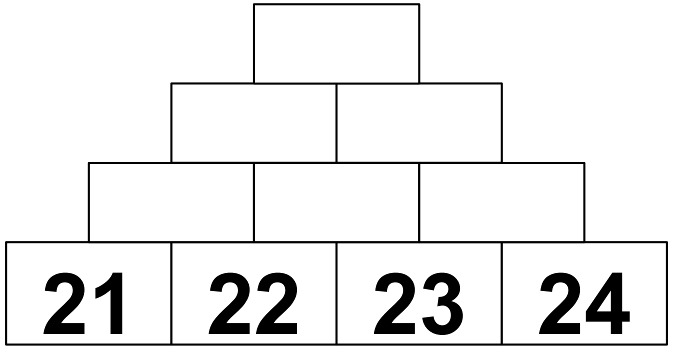
- Ändert sich der Deckstein, wenn man die Reihenfolge der Grundsteine verändert?
- Versucht einen kleinen Deckstein zu erhalten! Geht es noch kleiner?
- Versucht einen hohen Deckstein zu erhalten! Geht es noch höher?

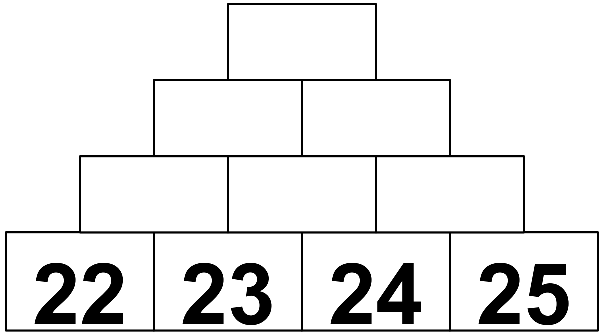
# Entwicklung Funktionalen Denkens

**Entwicklung des Funktionalen Denkens als (lebens-)langer Prozess**

- Funktionale Zusammenhänge aus dem Alltag, z.B.
- Erkennen & Fortsetzen von Mustern in Alltag und Grundschule

## Ideen für Zahlenmauern in der Sekundarstufe




**Arbeitsaufträge:**

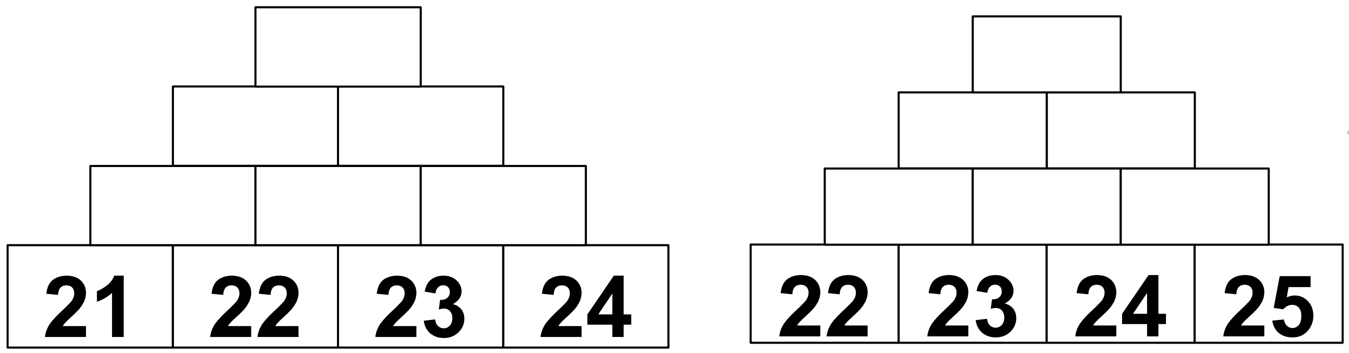
- Überlege vor dem Berechnen der Zahlenmauer mit den Grundsteinen **22-25**, um wie viel der Deckstein im Vergleich zur linken Mauer wächst.
- Wie verändern sich die Ergebnisse der einzelnen Steine in jedem Stockwerk?

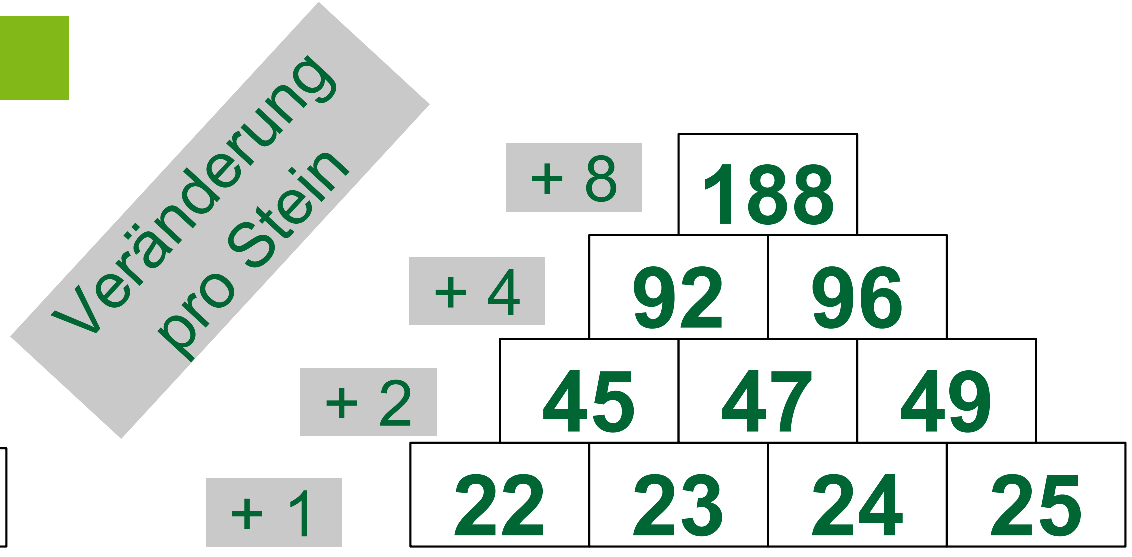
# Entwicklung Funktionalen Denkens

**Entwicklung des Funktionalen Denkens als (lebens-)langer Prozess**

- Funktionale Zusammenhänge aus dem Alltag, z.B.
- Erkennen & Fortsetzen von Mustern in Alltag und Grundschule

**Ideen für Zahlenmauern in der Sekundarstufe**

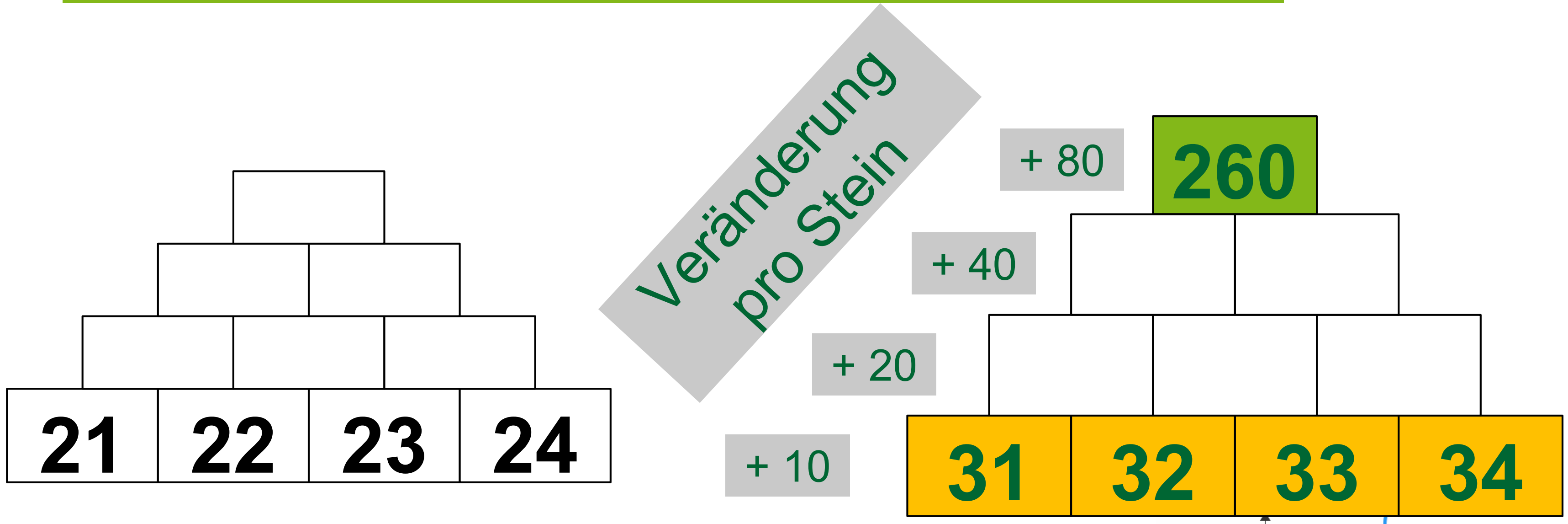


## Entwicklung des Funktionalen Denkens als (lebens-)langer Prozess

- Funktionale Zusammenhänge aus dem Alltag, z.B.
- Erkennen & Fortsetzen von Mustern in Alltag und Grundschule

**Ideen für Zahlenmauern in der Sekundarstufe**



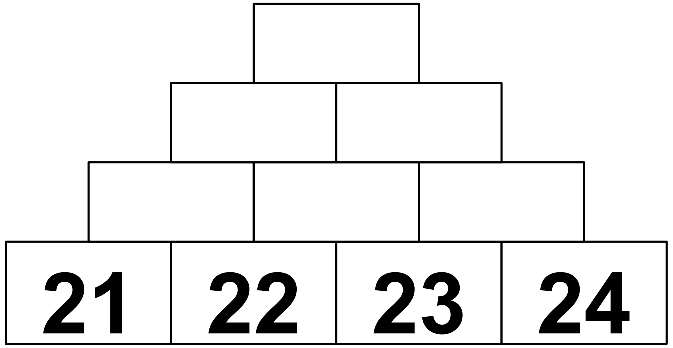

**Arbeitsauftrag:**

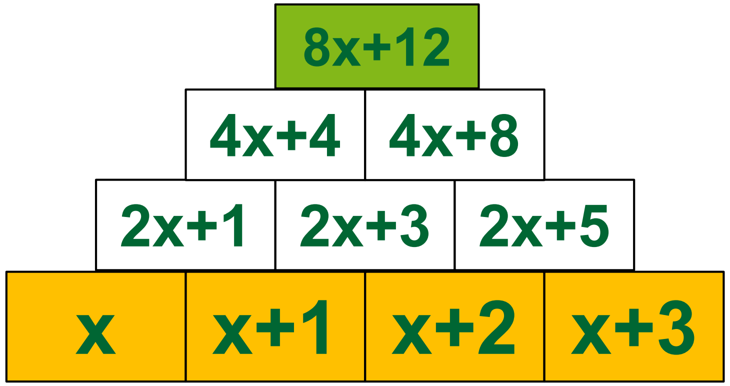
Bestimme ohne Berechnung der Einzelergebnisse, wie sich die Werte der Steine in jedem Stockwerk im Vergleich zur linken Mauer verändern.

## Entwicklung des Funktionalen Denkens als (lebens-)langer Prozess

- Funktionale Zusammenhänge aus dem Alltag, z.B.
- Erkennen & Fortsetzen von Mustern in Alltag und Grundschule

**Ideen für Zahlenmauern in der Sekundarstufe**




**Arbeitsauftrag:**

Betrachte nun Zahlenmauern mit beliebigen aufeinander folgenden Zahlen in den Grundsteinen. Wie hängen Grund- und Decksteinen zusammen?

# Entwicklung Funktionalen Denkens

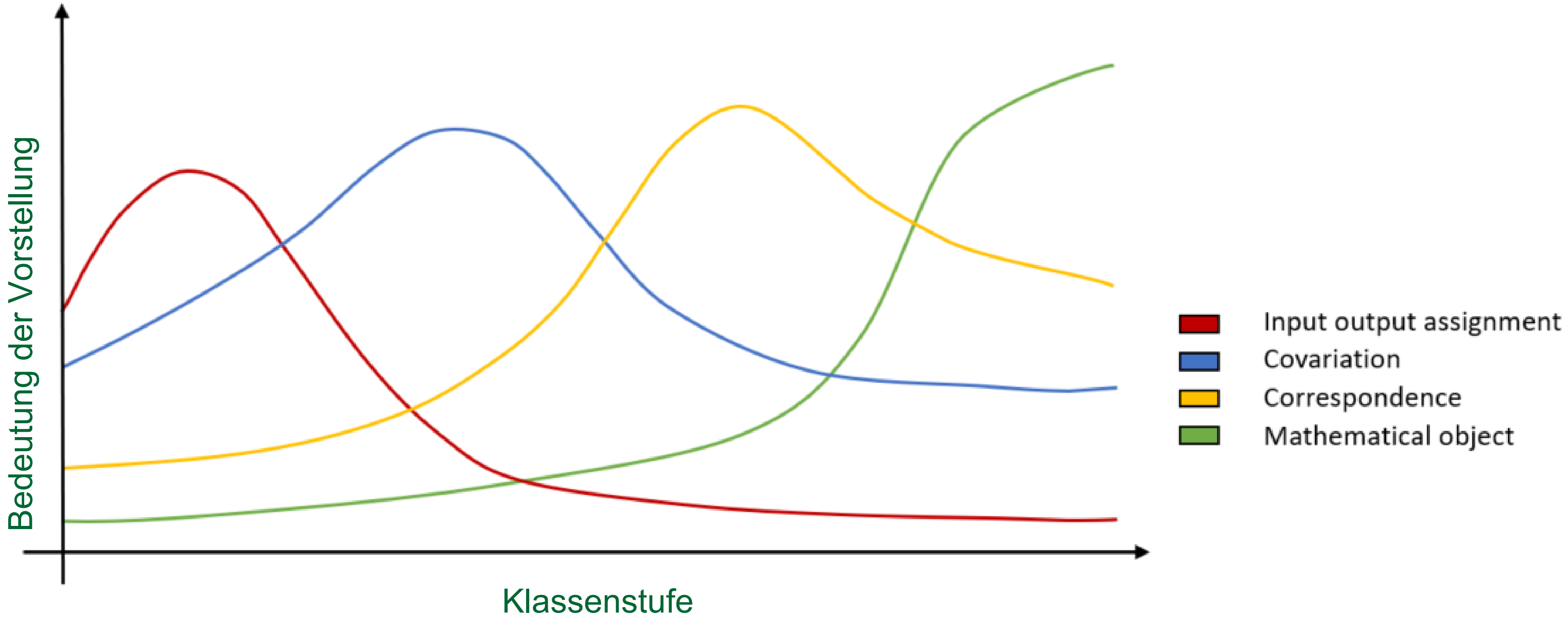
**Entwicklung des Funktionalen Denkens als (lebens-)langer Prozess**

- Funktionale Zusammenhänge aus dem Alltag, z.B.
- Erkennen & Fortsetzen von Mustern in Alltag und Grundschule

→ Einführung des Funktionsbegriffs in der Sekundarstufe I

- ➢ Funktionsklassen wie lineare, quadratische (& exponentielle) Funktionen
- ➢ Eigenschaften von Funktionen, z.B. Darstellungsarten, Monotonie, Schnittpunkte
- ➢ Später auch Aktivitäten wie Verketten, Differenzieren, Integrieren von Funktionen

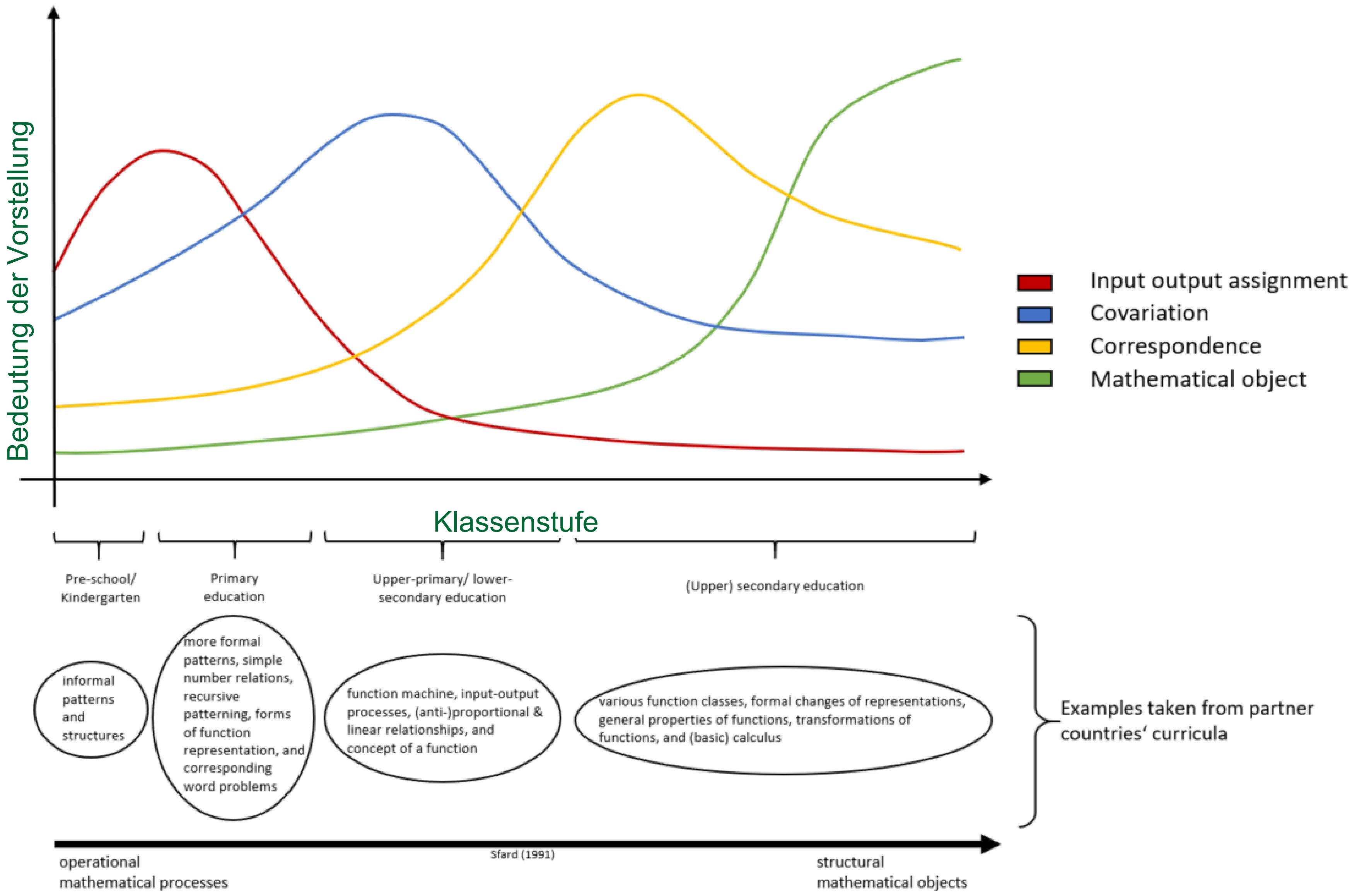
# Entwicklung Funktionalen Denkens




## Funktionales Denken: Adressierung in Curricula

In Deutschland eher Fokus auf Zuordnung, deshalb z.B. Kovariation schwierig für Lernende (Malle, 2000)

# Entwicklung Funktionalen Denkens




## Funktionales Denken: Entwicklung über typische Aktivitäten

# Entwicklung Funktionalen Denkens

**Aktivität (15 min Kleingruppenarbeit): →Aufbereitung als Hausaufgabe**

Schauen Sie sich Aufgaben in verschiedenen Mathematikbüchern der Grundschule an. Finden Sie drei Aufgaben, die Funktionales Denken fördern.

# Bildungsplan

- **Funktionales Denken im Bildungsplan Baden-Württemberg**
  - Explizit
  - Implizit

## 3.1.1.1 Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen verstehen

Die Schülerinnen und Schüler kennen verschiedene Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen im Zahlenraum bis 100. Sie sind in der Lage, sich im Zahlenraum bis 100 sicher zu orientieren.

| | |
|---|---|
| Mit geeigneten Zahlenfolgen das Entdecken von arithmetischen Mustern fördern.<br><br>Welche Kompetenzen der Kinder lassen sich an eigenkonstruierten Zahlenfolgen erkennen und weiterentwickeln? | (7) Gesetzmäßigkeiten in arithmetischen Mustern erkennen, beschreiben und fortsetzen |
| | (8) arithmetische Muster selbst entwickeln, systematisch verändern und beschreiben |
| | P F<br>O A4 - C4 S. 149 – 153 |

(Land Baden-Württemberg, 2016a, S. 12f)

## 3.2.4 Leitidee Funktionaler Zusammenhang

Die Schülerinnen und Schüler erfassen funktionale Zusammenhänge sprachlich und unter Verwendung von Tabellen, Graphen und Zuordnungsvorschriften und führen die verschiedenen Darstellungsformen situationsgerecht ineinander über. Sie beantworten inner- und außermathematische Fragestellungen mithilfe linearer und quadratischer Funktionen quantitativ.

(Land Baden-Württemberg, 2016b, S. 39)

# Bildungsplan

**Aktivität (20 Minuten Partnerarbeit):**
Finden Sie Stellen im Bildungplan BW bzw. in den KMK-Standards, an denen das Funktionale Denken addressiert wird. Um welche Inhalte geht es dabei jeweils?

**3 Gruppen:**
- Primarstufe
- Sekundarstufe 1
- Sekundarstufe 2

# Bildungsplan

**Aktivität (20 Minuten Partnerarbeit): →Besprechung**
Finden Sie Stellen im Bildungplan BW bzw. in den KMK-Standards, an denen das Funktionale Denken addressiert wird. Um welche Inhalte geht es dabei jeweils?

**3 Gruppen:**
- Primarstufe
- Sekundarstufe 1
- Sekundarstufe 2

# Übersicht internationale Curricula

## Primarstufe

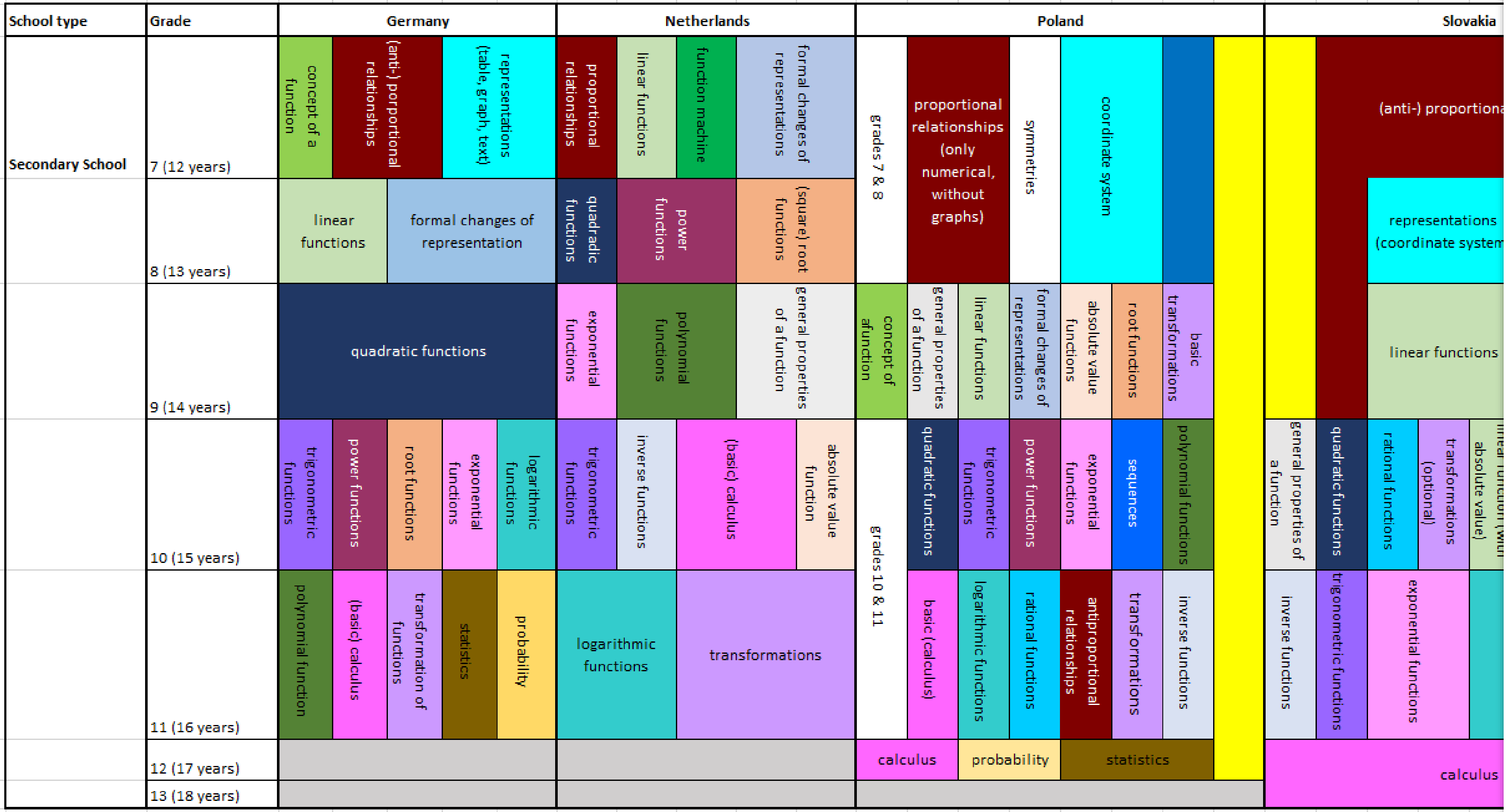
| School type | Grade | Germany | | Netherlands | | | Poland | | Slovakia | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Kindergarten | | informal patterns and structures | | informal patterns and structures | | picture graphs | informal patterns and structures | | informal patterns and st | |
| Primary School | 1 (6 years) | no clear attribution of competences to the grades | patterns and simple number relations | patterns, simple number relations | | | grades 1-3: no clear attribution | patterns and simple number relations | patterns and simple numbe | |
| | | | representations | introduction to representations (empty number line, 'rekenrek', histograms, ...) | | | | initial introduction to representations (arrows, arrow graphs, empty space instead of x) | representations (number li | ations |
| | 2 (7 years) | | word problems | word problems | | | | word problems | | |
| | 3 (8 years) | | function machine | introduction (continued) to representations (line graphs) | | | | drawing symmetrical figures | word problems | gh real |
| | 4 (9 years) | | | | | | | introduction to representations (continuation: number line, histograms, tables) | | ns |
| | 5 (10 years) | function machine | | introduction function machine | introduction (continued) to representations (sector graphs (percent/ fraction), ratio table) | | grades 4-6: no clear attribution | descriptive statistics (introduction, graphs, diagrams) | (anti-) proportional relationshi | ions, use ions to unctions, nships) |
| | 6 (11 years) | representations (coordinate system) | | sector graphs (percent/ fraction), ratio table | | | | Word problems; algebra (representations, algebraic expressions, linear equations) | | |

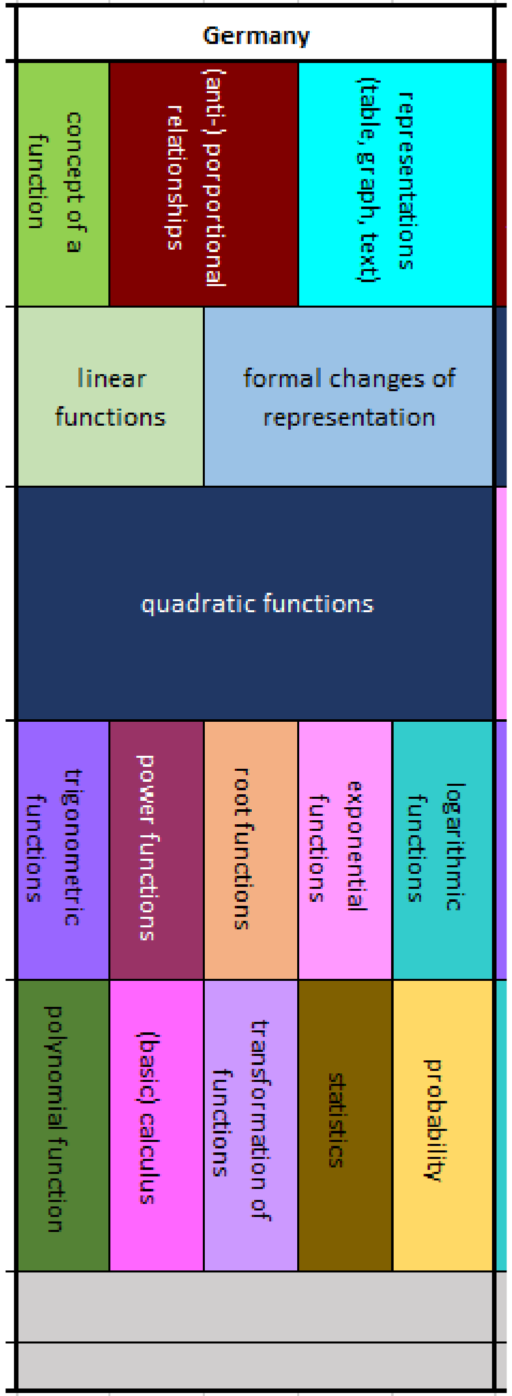
| Germany | |
|---|---|
| informal patterns and structures | |
| no clear attribution of competences to the grades | patterns and simple number relations |
| | representations |
| | word problems |
| | function machine |
| function machine | |
| representations (coordinate system) | |

PH Ludwigsburg
University of Education

# Übersicht internationale Curricula

## Sekundarstufe



# Schulbuchanalyse

**Ziel:**

- Schulbuchaufgaben bewerten können
- Schulbuchaufgaben anpassen/verbessern können

Worauf soll hierbei geachtet werden?

# Schulbuchanalyse

**Ziel:**

- **Schulbuchaufgaben bewerten können**
  - Welches Vorwissen wird für die Aufgabe benötigt?
  - Fördert die Aufgabe das Funktionale Denken oder kann die Aufgabe durch Anwendung eines Algorithmus gelöst werden?
  - Welche Aspekte Funktionalen Denkens werden durch die Aufgabe gefördert?
  - Hat die Aufgabe einen Bildungsplanbezug?
- **Schulbuchaufgaben anpassen/verbessern können**
  - Wie kann das Ziel der Förderung des Funktionalen Denkens (besser) erreicht werden?

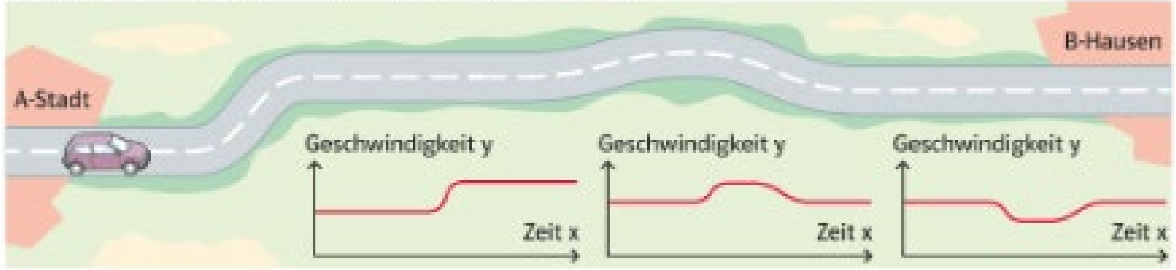
# Schulbuchanalyse

**Aktivität (5 min Partnerarbeit):**

Analysieren Sie die Schulbuchaufgabe. Beziehen Sie die folgenden Fragen mit ein:

- Welches Vorwissen wird für die Aufgabe benötigt?
- Fördert die Aufgabe das Funktionale Denken oder kann die Aufgabe durch Anwendung eines Algorithmus gelöst werden?
- Welche Aspekte Funktionalen Denkens werden durch die Aufgabe gefördert?
- Hat die Aufgabe einen Bildungsplanbezug?

Die Geschwindigkeit eines Elektroautos wird auf der Teilstrecke von A-Stadt nach B-Hausen gemessen. Es fährt so schnell wie möglich. Die dargestellten Graphen beschreiben den Zusammenhang zwischen der Zeit x und der Geschwindigkeit y. Welcher der Graphen beschreibt die Fahrt des Elektroautos? Begründe.




(Baum et al., 2016, S. 63)

# Schulbuchanalyse

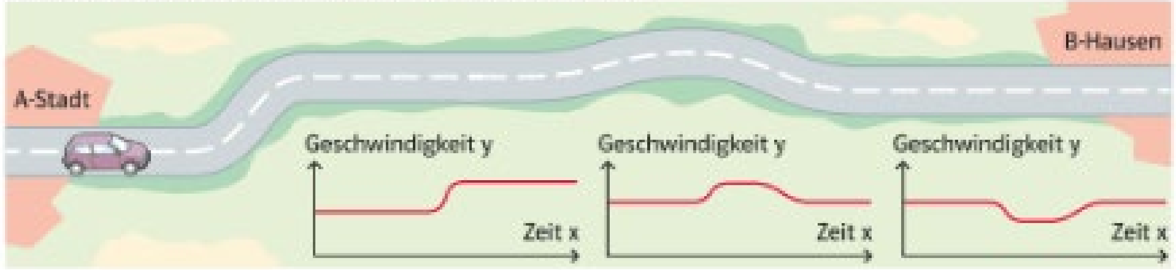
**Aktivität (5 min Partnerarbeit):**

Analysieren Sie die Schulbuchaufgabe. Beziehen Sie die folgenden Fragen mit ein:

- Welches Vorwissen wird für die Aufgabe benötigt?
- Fördert die Aufgabe das Funktionale Denken oder kann die Aufgabe durch Anwendung eines Algorithmus gelöst werden?
- Welche Aspekte Funktionalen Denkens werden durch die Aufgabe gefördert?
- Hat die Aufgabe einen Bildungsplanbezug?

→**Besprechung**

Die Geschwindigkeit eines Elektroautos wird auf der Teilstrecke von A-Stadt nach B-Hausen gemessen. Es fährt so schnell wie möglich. Die dargestellten Graphen beschreiben den Zusammenhang zwischen der Zeit x und der Geschwindigkeit y. Welcher der Graphen beschreibt die Fahrt des Elektroautos? Begründe.




(Baum et al., 2016, S. 63)

# Schulbuchanalyse

**Aktivität (5 min Partnerarbeit):**

Analysieren Sie die Schulbuchaufgabe. Beziehen Sie die folgenden Fragen mit ein:

- Welches Vorwissen wird für die Aufgabe benötigt?
- Fördert die Aufgabe das Funktionale Denken oder kann die Aufgabe durch Anwendung eines Algorithmus gelöst werden?
- Welche Aspekte Funktionalen Denkens werden durch die Aufgabe gefördert?
- Hat die Aufgabe einen Bildungsplanbezug?

2 Gib die Steigung m und den y-Achsenabschnitt c der Geraden g an. Zeichne die Gerade in ein Koordinatensystem.

a) g: $y = 3x + 2$ b) g: $y = -2x - 2$ c) g: $y = 5x - 1$ d) g: $y = -3x + 3$
e) g: $y = -2x$ f) g: $y = 4x$ g) g: $y = -3$ h) g: $y = x$

(Baum et al., 2016, S. 72)

# Schulbuchanalyse

**Aktivität (5 min Partnerarbeit):**

Analysieren Sie die Schulbuchaufgabe.
Beziehen Sie die folgenden Fragen mit ein:

- Welches Vorwissen wird für die Aufgabe benötigt?
- Fördert die Aufgabe das Funktionale Denken oder kann die Aufgabe durch Anwendung eines Algorithmus gelöst werden?
- Welche Aspekte Funktionalen Denkens werden durch die Aufgabe gefördert?
- Hat die Aufgabe einen Bildungsplanbezug?

→**Besprechung**

2 Gib die Steigung m und den y-Achsenabschnitt c der Geraden g an. Zeichne die Gerade in ein Koordinatensystem.

a) g: y = 3x + 2 b) g: y = −2x − 2 c) g: y = 5x − 1 d) g: y = −3x + 3
e) g: y = −2x f) g: y = 4x g) g: y = −3 h) g: y = x

(Baum et al., 2016, S. 72)

# Schulbuchanalyse

**Aktivität (15 min Kleingruppenarbeit): →Aufbereitung als Hausaufgabe**

Nutzen Sie für diese Aufgabe ein Mathematik-Schulbuch Ihrer Wahl (Grundschule, Sek. I oder Sek. II).

- Identifizieren Sie mindestens eine gute und eine verbesserungswürdige Aufgabe mit Bezug zu Funktionen / zum Funktionalen Denken. Begründen Sie!
- Adaptieren Sie die Aufgabe mit Verbesserungspotential, so dass das Funktionale Denken optimaler gefördert wird. Begründen Sie!

# Zusmmenfassung: 10. Veranstaltung

- **Input: Entwicklung des Funktionalen Denkens im Verlauf der Schulzeit**
- **Aktivität: Funktionales Denken in Grundschulbüchern**
- **Funktionales Denken im Bildungsplan BW und in internationalen Curricula**
- **Analyse von Schulbuchaufgaben im Kontext des Funktionalen Denkens**

**Lernziele:**

➢ Die Entwicklung des Funktionalen Denkens als (lebens-)langen Prozess erkennen.
➢ Grundschulaufgaben zur Förderung des Funktionalen Denkens identifizieren.
➢ Aussagen aus Curricula kennen, die auf das Funktionale Denken fokussieren.
➢ Schulbuchaufgaben in Bezug auf das Funktionale Denken bewerten und ggf. verbessern können.

# Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und bis zum nächsten Mal!

# Funktionales Denken von Schülerinnen und Schülern fördern – Spezifische Lernumgebungen erkunden und (weiter-)entwickeln

11. Sitzung:
Abschluss

Ute Sproesser
Kerstin Frey

# Agenda: 11./12. Veranstaltung

- **Besprechung Aufgaben**
- **Fragen, Feedback & Abschluss**

**Lernziele:**

➢ **Schulbuchaufgaben in Bezug auf das Funktionale Denken bewerten und ggf. verbessern können.**

# Entwicklung Funktionalen Denkens

**Aktivität (15 min Kleingruppenarbeit): →Besprechung**

Schauen Sie sich Aufgaben in verschiedenen Mathematikbüchern der Grundschule an. Finden Sie drei Aufgaben, die Funktionales Denken fördern.

# Schulbuchanalyse

**Aktivität (15 min Kleingruppenarbeit): →Besprechung**

Nutzen Sie für diese Aufgabe ein Mathematik-Schulbuch Ihrer Wahl (Grundschule, Sek. I oder Sek. II).

- Identifizieren Sie mindestens eine gute und eine verbesserungswürdige Aufgabe mit Bezug zu Funktionen / zum Funktionalen Denken. Begründen Sie!
- Adaptieren Sie die Aufgabe mit Verbesserungspotential, so dass das Funktionale Denken optimaler gefördert wird. Begründen Sie!

# Fragen, Feedback & Abschluss

**Verbuchung Ihrer Bausteine / MPs →Terminabsprachen**

**Feedback zum Seminar**

- Zeitlicher Umfang
- Verhältnis Input – Aktivitäten
- Nützlichkeit der Inhalte
- Einschätzung Lernzuwachs
- Gibt es sonst noch offene Fragen / Wünsche / Klärungsbedarf?

**Zusätzlich Fragebogen:**

Anonymisierte Rückmeldung zu Lernzuwächsen sowie standardisiertes Feedback

# Zusammenfassung: 11./12. Veranstaltung

- **Besprechung Aufgaben**
- **Präsentation Lernvideos**
- **Fragen, Feedback & Abschluss**

**Lernziele:**

➢ **Schulbuchaufgaben in Bezug auf das Funktionale Denken bewerten und ggf. verbessern können.**

# Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit und eine gute Prüfungsphase!

# Literatur


Abrahamson, D. (2009). Embodied design: constructing means for constructing meaning. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(1), 27–47. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9137-1

Adu-Gyamfi, K. (2007). *Connections among representations: The nature of students' coordinations on a linear function task* [Dissertation]. North Carolina State University, Raleigh, North Carolina.

Adu-Gyamfi, K., Stiff, L. V., & Bossé, M. J. (2012). Lost in translation: Examining translation errors associated with mathematical representations. *School Science and Mathematics*, *112*(3), 159–170. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2011.00129.x

Ainsworth, S., Bibby, P., & Wood, D. (2002). Examining the effects of different multiple representational systems in learning primary mathematics. *Journal of the Learning Sciences*, *11*(1), 25–61. https://doi.org/10.1207/S15327809JLS1101_2

Alberto, R., Shvarts, A., Drijvers, P., & Bakker, A. (2022). Action-based embodied design for mathematics learning: A decade of variations on a theme. *International Journal of Child-Computer Interaction*, *32*, 100419. https://doi.org/10.1016/j.ijcci.2021.100419

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM*, *45*(6), 797–810. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6

Athanasiou, A., Antoniadis, M., Yasoumis, N., Ellina, A., Loizias, S., Mattheou, K., Mavrokordatou, M., Mousoulidou–Nikolaidou, M., Papagiannis, K., Timotheou, S., & Philipou, A. (2016a). *Grade 7 mathematics textbook* (3. Aufl.). Cyprus Ministry of Education and Culture.

Athanasiou, A., Antoniadis, M., Yasoumis, N., Ellina, A., Loizias, S., Mattheou, K., Mavrokordatou, M., Mousoulidou–Nikolaidou, M., Papagiannis, K., Timotheou, S., & Philipou, A. (2016b). *Grade 8 mathematics textbook* (3. Aufl.). Cyprus Ministry of Education and Culture.

# Literatur

Balacheff, N., & Kaput, J. J. (1997). Computer-based learning environments in mathematics. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Hrsg.), *International Handbook of Mathematics Education* (S. 469–501). Springer Netherlands.

Barsalou, L. W. (1999). Perceptual symbol systems. *Behavioral and Brain Sciences*, *22*, 577–660.

Barsalou, L. W. (2008). Grounded cognition. *Annual Review of Psychology*, *59*, 617–645. https://doi.org/10.1146/annurev.psych.59.103006.093639

Barzel, B., & Ganter, S. (2010). Experimentell zum Funktionsbegriff. *Praxis Der Mathematik in Der Schule*(31), 14–19.

Barzel, B., Glade, M., & Klinger, M. (2021). *Algebra und Funktionen*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-61393-1

Barzel, B., Hußmann, S., & Leuders, T. (2005). Der "Funktionenführerschein": Wie Schülerinnen und Schüler das Denken in Funktionen wiederholen und festigen können. *Praxis Der Mathematik*, *47*(2), 20–25.

Barzel, B., & Ruchniewicz, H. (2020). *SAFE Tool* [Papierversion]. https://www.uni-due.de/imperia/md/images/bif/safe_tool_papierversion.pdf

Baum, M., Bellstedt, M., Buck, H., Demuth, G., Dürr, R., Freudigmann, H., Giersemehl, I., Greulich, D., Haug, F., Hußmann, S., Jörgens, T., Jungmann, K.-P., Jürgensen-Engl, T., Kaps, K., König, A., Leuders, T., Lorenzen, H., Rauscher, M., Richter, K., . . . Zmaila, A. (2016). *Lambacher Schweizer 7* [Neubearbeitung für] Baden-Württemberg, 1. Auflage). Klett.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research in Mathematics Education*, *46*(5), 511–558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

# Literatur

Bodemer, D., & Faust, U. (2006). External and mental referencing of multiple representations. *Computers in Human Behavior*, *22*(1), 27–42. https://doi.org/10.1016/j.chb.2005.01.005

Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, *18*(1), 32–42. https://doi.org/10.3102/0013189X018001032

Büchter, A., & Henn, H.-W. (2010). *Elementare Analysis: Von der Anschauung zur Theorie*. *Mathematik Primar- und Sekundarstufe*. Spektrum Akad.-Verl.

Christou, C., Pitta-Pantazi, D., Pittalis, M., Demosthenous, E., & Chimoni, M. (2023). Personalized mathematics and mathematics inquiry: A design framework for mathematics textbooks. In R. Leikin (Hrsg.), *Research in Mathematics Education. Mathematical Challenges For All* (S. 71–92). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18868-8_5

Digel, S., Engelhardt, A., & Roth, J. (2023). Digital gerahmte Experimentierumgebungen als dynamischer Zugang zu Funktionen. In J. Roth, M. Baum, K. Eilerts, G. Hornung, & T. Trefzger (Hrsg.), *Die Zukunft des MINT-Lernens – Band 2* (S. 1–16). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-66133-8_1

Dorier, J.-L., & Maass, K. (2020). Inquiry-based mathematics education. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2. Aufl., 384-388). Springer International Publishing.

Drijvers, P. (2019). *Embodied instrumentation: combining different views on using digital technology in mathematics education.* Utrecht University. Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics, Utrecht, Netherlands. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02436279

Duijzer, C., van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M., Doorman, M., & Leseman, P. (2019). Embodied learning environments for graphing motion: a systematic literature review. *Educational Psychology Review*, *31*(3), 597–629. https://doi.org/10.1007/s10648-019-09471-7

# Literatur

Evans, M. D. (1998). *Whitehead and philosophy of education: The seamless coat of learning*. *Value inquiry book series: Bd. 74*. Rodopi.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, *1*(1-2), 3–8. https://doi.org/10.1007/BF00426224

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. *Mathematics Education library*. Springer.

Frey, K., Sproesser, U., & Veldhuis, M. (2022). What is functional thinking? Theoretical considerations and first results of an international interview study. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, & F. Ferretti (Hrsg.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (S. 497–504).

FunThink (Ed.). (2021). *Vision document on functional thinking*. https://www.funthink.eu/fileadmin/user_upload/io1_vision_document_version_2.0.pdf

Gravemeijer, K., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies*, *32*(6), 777–796.

Heinze, A., Star, J. R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM*, *41*(5), 535–540. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0214-4

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Hrsg.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (S. 65–97). Macmillan.

# Literatur

Hoffkamp, A. (2012). Funktionales Denken mit dem Computer unterstützen - Empirische Untersuchungen im Rahmen des propädeutischen Unterrichts der Analysis. In U. Kortenkamp & A. Lambert (Hrsg.), *Medien vernetzen: Zur Zukunft des Analysisunterrichts vor dem Hintergrund der Verfügbarkeit Neuer Medien (und Werkzeuge): Bericht über die 26. und 27. Arbeitstagung des Arbeitskreises "Mathematikunterricht und Informatik" in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e.V. vom 26-28.9.2008 in Fuldatal und 25.-27.9.2009 in Soest* (S. 51–56). Franzbecker.

Hoyles, C. (2018). Transforming the mathematical practices of learners and teachers through digital technology. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 209–228. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1484799

Hußmann, S., & Laakmann, H. (2011). Eine Funktion - viele Gesichter: Darstellen und Darstellungen wechseln. *Praxis Der Mathematik in Der Schule*, *53*(38), 2–13.

Johnson, H. L. (2015). Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(1), 89–110. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9590-y

Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic Books.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, *60*(1), 1–64. https://doi.org/10.3102/00346543060001001

Lichti, M. (2019). *Funktionales Denken fördern*. Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-23621-2

Lowe, R. K. (1999). Extracting information from an animation during complex visual learning. *European Journal of Psychology of Education*, *14*(2), 225–244. https://doi.org/10.1007/BF03172967

# Literatur

Ludwig, M., & Oldenburg, R. (2007). Lernen durch Experimentieren. Handlungsorientierte Zugänge zur Mathematik. *Mathematik Lehren, 141*, 4–11.

Majewska, D. (2019). What are the issues surrounding the use of realistic contexts in the mathematics classroom? *ESPRESSO Cambridge Mathematics*(18).

Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *Mathematik Lehren*, *103*, 8–11.

Marshman, M., Pendergast, D., & Brimmer, F. (2011). Engaging the middle years in mathematics. In J. Clark, J. Kissane, T. Mousley, T. Spencer, & S. Thornton (Hrsg.), *Mathematics: Traditions and (new) practices : proceedings of the AAMT-MERGA conference held in Alice Springs, 3-7 July 2011, incorporating the 23rd Biennial Conference of The Australian Association of Mathematics Teachers Inc. and the 34th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Inc* (S. 500–507). AAMT & MERGA.

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (Hrsg.). (2016a). *Bildungsplan der Grundschule*. https://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_GS_M.pdf

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport Baden-Württemberg (Hrsg.). (2016b). *Gemeinsamer Bildungsplan der Sekundarstufe 1 Mathematik*. https://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsbw/export-pdf/depot-pdf/ALLG/BP2016BW_ALLG_SEK1_M.pdf

Monaghan, J., Trouche, L., & Borwein, J. M. (2016). *Tools and mathematics: Instruments for learning*. *Mathematics Education library*. Springer.

# Literatur

Nathan, M. J., & Koedinger, K. R. (2000). An investigation of teachers’ beliefs of students’ algebra development. *Cognition and Instruction*, *18*(2), 209–237. https://doi.org/10.1207/S1532690XCI1802_03

OECD. (2009). *Pisa take the test: Sample questions from OECD's PISA assessments*. OECD. http://www.sourceoecd.org/9789264050808

Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2020). Young students’ functional thinking modes: The relation between recursive patterning, covariational thinking, and correspondence relations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *51*(5), 631–674. https://doi.org/10.5951/jresematheduc-2020-0164

Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. R. (2015). Not a One-Way Street: Bidirectional Relations Between Procedural and Conceptual Knowledge of Mathematics. *Educational Psychology Review*, *27*(4), 587–597. https://doi.org/10.1007/s10648-015-9302-x

Roth, J. (2008). Systematische Variation – Eine Lernumgebung vernetzt Geometrie & Algebra. *Mathematik Lehren, 146*, 17–21.

Ruchniewicz, H. (2022). *Sich selbst diagnostizieren und fördern mit digitalen Medien*. Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-35611-8

Schnotz, W., & Bannert, M. (2003). Construction and interference in learning from multiple representation. *Learning and Instruction*, *13*(2), 141–156. https://doi.org/10.1016/S0959-4752(02)00017-8

Shapiro, L., & Stolz, S. A. (2019). Embodied cognition and its significance for education. *Theory and Research in Education*, *17*(1), 19–39. https://doi.org/10.1177/1477878518822149

# Literatur

Sproesser, U., Dörfler, T., & Eichler, A. (2018). Begriffswissen zu linearen Funktionen und algebraisch-graphischer Darstellungswechsel: Schülerfehler vs. Lehrereinschätzung. In P. Bender & T. Wassong (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018: Vorträge zur Mathematikdidaktik und zur Schnittstelle Mathematik/Mathematikdidaktik auf der gemeinsamen Jahrestagung GDM und DMW 2018: (52. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik)* (S. 1723–1726). WTM Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien.

Sproesser, U., & Frey, K. (angenommen). Was ist funktionales Denken und wie kann es im Unterricht adressiert werden? Ergebnisse einer Interviewstudie. *Beiträge Zum Mathematikunterricht 2022*.

Sproesser, U., Vogel, M., & Dörfler, T. (2020). Typische Lernschwierigkeiten mit Darstellungswechseln bei elementaren Funktionen - Welche Schwierigkeiten kennen Lehrkräfte und wie schätzen sie Aufgabenbearbeitungen ihrer Klassen ein?. *Mathematica Didactica*, *43*(1), 1–24. https://doi.org/10.18716/ojs/md/2020.1154

Sproesser, U., Vogel, M., Dörfler, T., & Eichler, A. (2022). Changing between representations of elementary functions: students' competencies and differences with a specific perspective on school track and gender. *International Journal of STEM Education*, *9*(33). https://doi.org/10.1186/s40594-022-00350-2

Stellmacher, H. (1986). Die nichtquantitative Beschreibung von Funktionen durch Graphen beim Einführungsunterricht. In G. von Harten, H. N. Jahnke, T. Mormann, M. Otte, F. Seeger, H. Steinbring, & H. Stellmacher (Hrsg.), *IDM-Reihe: Bd. 11. Funktionsbegriff und funktionales Denken* (S. 21–34). Aulis-Verlag Deubner.

# Literatur

Swan, M. (1905). *The language of functions and graphs*. Shell Centre.

van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2020). Realistic mathematics education. In S. Lerman (Hrsg.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2. Aufl., S. 713–717). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal Für Mathematikdidaktik*, *10*(1), 3–37.

vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *Mathematik Lehren, 118*, 4–8.

Weigand, H.-G. (1988). Zur Bedeutung der Darstellungsform für das Entdecken von Funktionseigenschaften. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *9*(4), 287–325. https://doi.org/10.1007/BF03339297

Whitehead, A. N. (1929). *The aims of education*. Macmillan.

Wittmann, G. (2019). *Elementare Funktionen und ihre Anwendungen* (2., überarbeitete und erweiterte Auflage). *Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II*. Springer Spektrum. http://www.springer.com https://doi.org/10.1007/978-3-662-58060-8

Zindel, C. (2019). *Den Kern des Funktionsbegriffs verstehen* [Dissertation, Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH]. GBV Gemeinsamer Bibliotheksverbund.