Plan zajęć - Kurs dla nauczycieli

Definicja funkcji i reprezentacje	
Teaching hours:	2 x 45 minut
Target group:	Przyszli nauczuciele matematyki
Important links	
Learning environment:	Nomogram
Teaser video:	Nomogram
Classroom videos:	-
Description	
Goals:	Nauczyciele przygotowujący się do zawodu dzięki tym zajęciom mają: - zastanowić się nad pojęciem funkcji i jej różnymi definicjami, - decydować i uzasadniać, czy podane definicje funkcji (a także funkcji liniowej) są poprawne, - odkryć, że w zależności od poziomu nauczania zbiór uporządkowanych par może być zarówno reprezentacją funkcji (szkoła średnia), jak i jej definicją (poziom uniwersytecki), - uświadomić sobie rolę reprezentacji funkcji (w zadaniach), - ćwiczyć (w kontekście zadań) przechodzenie między różnymi reprezentacjami funkcji i wybieranie najlepszej reprezentacji w zależności od kontekstu, - przedyskutować błędne przekonania wybranych uczniów na temat reprezentacji funkcji i pojęcia funkcji.
Structure:	- Praca indywidualna - rozwiązywanie 4 zadań i refleksja w całej grupie i w parach nad poprawnością rozwiązań, błędami i nieporozumieniami oraz fałszywymi przekonaniami ujawnionymi w trakcie rozwiązywania zadań, celem zadań, różnymi reprezentacjami. - Teaser wideo na temat prezentacji scenariusza - środowiska edukacyjnego: Nomogram - Reprezentacje funkcji a pojęcie funkcji - Wymienianie i analizowanie reprezentacji - Czym jest funkcja - różne definicje do oceny

Aktywności

Reprezentacje a pojęcie funkcji

(Praca indywidualna z ulotką 1 i wspólna refleksja 30 minut)

Aktywność 1. Indywidualne rozwiązywanie zadań 1-4 dotyczących wyboru właściwej reprezentacji

Uczestnicy kursu rozwiązują zadania **1, 2, 3, 4 (Ultka 1)** na temat wyboru najlepszej reprezentacji i zrozumienia jej roli.

Rozwiąż cztery poniższe zadania. Zastanów się nad metodą rozwiązywania i ich celem..

ZADANIE 1. Czy istnieje funkcja, której dziedziną jest przedział otwarty (0,5), a zbiorem wartości jest przedział domknięty [2,5]? Uzasadnij swoją odpowiedź.

ZADANIE 2. Czy istnieje funkcja, której dziedziną jest {1,2,3}, a zbiorem wartości {1,2}? Uzasadnij swoją odpowiedź.

ZADANIE 3. Czy istnieje funkcja, która dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y spełnia warunek: $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. Uzasadnij swoją odpowiedź.

[or $f(x + y) = f(x) + f(y)$ or $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$]

ZADANIE 4. Jeśli podstawimy 1 za x w wyrażeniu $ax^2 +bx +c$ otrzymamy liczbę dodatnią, podstawiając 6 otrzymamy liczbę ujemną. Ile rozwiązań ma równanie $ax^2 +bx +c =0$? Uzasadnij swoją odpowiedź.

Aktywność 2. Wspólna refleksja nad poprawnością rozwiązań zadań 1-4

Uczestnicy kursu prezentują swoje rozwiązania na tablicy i wspólnie z wykładowcą omawiają poprawność swoich rozwiązań, błędy i błędne przekonania oraz fałszywe przekonania ujawnione w trakcie rozwiązywania zadań.

Pytanie dodatkowe:

- - Jaki jest właściwy sposób uzasadnienia? Jak możemy odpowiedzieć na te pytania w zadaniach 1-3 "Czy funkcja istnieje?"?

Re: Jeśli odpowiedź jest pozytywna (a wszystkie są) - najprościej podać dowolny przykład <u>w dowolnej reprezentacji</u> spełniający wymaganie lub teoretycznie udowodnić jego istnienie.

Jeśli odpowiedź byłaby negatywna (mogłoby to być pierwsze podejście do Zadania 1) - należałoby to udowodnić teoretycznie.

Reprezentacje a pojęcie funkcji

(Praca w parach i wspólna dyskusja wstępna – 30 minutes)

Aktywność 3. Dalsza refleksja - dyskusja w parach na temat zadań 1-4

Uczestnicy kursu pracując w grupach (parach) odpowiadają na 4 poniższe pytania.

Jeśli pewne tematy pojawiają się spontanicznie podczas wspólnej dyskusji (Ćwiczenie 2), albo badamy je razem w tym czasie i nie przekazujemy ich do dyskusji w parach (Ćwiczenie 3), albo tylko częściowo zajmujemy się nimi podczas wspólnej dyskusji i prosimy uczestników o usystematyzowanie ich wniosków w pracy grupowej.

1. Jaki jest cel rozwiązywania zadań 1-4? Co one badają?
2. Jakie błędne przekonania mogą ujawnić uczniowie podczas rozwiązywania zadań? [również na podstawie błędów i błędnych przekonań uczestników kursu ujawnionych w trakcie rozwiązywania zadań].
3. Jakie reprezentacje funkcji pojawiły się w rozwiązaniach zadań? Wymień różne reprezentacje i podaj przykłady.
4. Jaka jest użyteczność różnych reprezentacji?

Wnioski z pierwszej wspólnej dyskusji.

Sporządzanie listy reprezentacji funkcji.

Reprezentacje a pojęcie funkcji

(praca indywidualna i praca w parach (ulotka 2) oraz wspólna dyskusja wstępna – 15 minutes)

Aktywność 4. Co to jest funkcja? Napisz własną definicję.

Każdy uczestnik kursu formułuje anonimowo na małej kartce papieru swoją własną definicję i anonimowo przekazuje ją wykładowcy do późniejszej dyskusji.

Aktywność 5.Co odkrywamy?

Dyskusja w parach na temat Ulotki 2: dwie definicje funkcji (historia) i reprezentacje wymienione w podręczniku.

Wykładowca rozdaje studentom Handout 2 zawierający dwie różne ogólne definicje funkcji uniwersyteckiej (1):

1

Źródło: Sajka (2019, p. 15-16):

“W matematyce istnieją dwa fundamentalnie różne podejścia do definiowania pojęcia funkcji, dwie kontrastujące definicje pojęcia funkcji sformułowane przez Peano (1911) i Hausdorffa (1914):

1. Według Peano relacja to pewien zbiór par uporządkowanych, a z kolei funkcja to pewien specjalny typ relacji, w której jeśli para (x, y) oraz (x, z) są parami należącymi do tej relacji, to y = z.

2. Hausdorff (1914) zdefiniował najpierw produkt dowolnych zbiorów A, B jako zbiór wszystkich par uporządkowanych p = (a, b), gdzie a ϵ A i b ϵ B, a następnie napisał:

> *(...) rozważymy pewien zbiór P takich par, mających mianowicie tę cechę, że każdy element a z A występuje na pierwszym miejscu w jednej i tylko jednej parze p z P. Każdy element a określa w ten sposób jeden i tylko jeden element b, ten właśnie, z którym w parze p = (a, b) jest złączony; ten element określony przez a, od a zależny, przyporządkowany a, oznaczamy przez b = f(a) i mówimy, że przez to w A (tzn. dla wszystkich elementów z A) została zdefiniowana pewna jednoznaczna funkcja. Dwie takie funkcje f(a), f’(a) uważamy za równe wtedy i tylko wtedy, gdy przynależne zbiory par P, P’ są równe, a więc dla każdego a zachodzi f(a) = f’(a)*

(Hausdorff, 1914, s. 33).

Literatura:

- Hausdorff, F. 1914, *Grundziige der Mengenlehre*, Leipzig.
- Peano, G. (1911). Sulla definizione di funzione, *Atti della Reale Accademia dei Lincei, Serie 5a, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali* 20, 3-5.
- Sajka, M. (2019*). Pojęcie funkcji. Wiedza przedmiotowa nauczyciela matematyki*. Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Pedagogicznego, DOI 10.24917/9788380841048.

Handout 2 zawiera również skany podręcznika: (Kurczab, Kurczab, Świda, Wydanie IV, Warszawa, 2015) i Matematyka. Zbiór zadań do liceów I techników, klasa 1 (Kurczab, Kurczab, Świda, Wydanie III, Warszawa, 2014) . Fragment (2) z podręcznika dla drugiej klasy szkoły średniej wymienia różne rodzaje reprezentacji, w tym zbiór uporządkowanych par (patrz wprowadzenie na stronie 286, punkt (d)).

2

286 8. Funkcja i jej własności

Sposoby opisywania funkcji

Najczęstszymi sposobami, które stosujemy do opisywania funkcji, są:

a) opis słowny
b) tabelka
c) graf
d) zbiór par uporządkowanych
e) wzór
f) wykres

3

8.9. **8.9.** Dana jest funkcja f. Podaj opis słowny tego przyporządkowania.

a) $f\colon x \to \sqrt{x}$, gdzie $x \in \{0, 1, 4, 9, 16\}$

b) $f\colon x \to \frac{1}{x}$, gdzie $x \in \left\{-\frac{1}{2}; 4{,}5; \frac{3}{4}; 11\right\}$

c) $f\colon x \to -x$, gdzie $x \in \{-10, -8, -4, 6, 8\}$

d) $f\colon x \to 0{,}5x$, gdzie $x \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, 6, 8\right\}$

.10. **8.10.** Dana jest funkcja, przedstawiona w postaci zbioru par uporządkowanych. Narysuj wykres tej funkcji.

a) $\{(-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

b) $\{(-4, 3), (-3, 4), (-2, 0), (-1, 1), (0, 3), (2, 4)\}$

c) $\{(-3, 1), (-2, 1), (-1, 1), (0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$

d) $\{(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$

.11. **8.11.** Dana jest funkcja, opisana za pomocą zbioru par uporządkowanych. Podaj wzór tej funkcji.

a) $\{(-2, 3), (-1, 4), (0, 5), (1, 6)\}$

b) $\{(-4, 8), (-3, 6), (1, -2), (2, -4), (3, -6), (4, -8)$

c) $\left\{\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{64}\right), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{27}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right), (0, 0), (2, 8), (3, 27), (4, 64)\right\}$

d) $\left\{(-8, 5), (-3, 5), \left(-\frac{1}{2}, 5\right), (3, 5), (11, 5)\right\}$

.12. **8.12.** Dana jest funkcja, opisana za pomocą zbioru par uporządkowanych: $\{(1, 3), (-2, 7), (7, 4), (0, 0), (8, 1)\}$.

a) Podaj wartość funkcji dla argumentu 7.

b) Podaj argument funkcji, dla którego wartość funkcji wynosi 1.

.13. **8.13.** Dana jest funkcja $f(x) = -2x^2 + 8$, gdzie $x \in \{-2, -1, 2, 3\}$.

a) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu 2.

b) Czy istnieje taki argument funkcji f, dla którego wartość funkcji wynosi 6? Jeśli tak, to podaj ten argument.

.54. **8.14.** Dana jest funkcja, opisana za pomocą zbioru par uporządkowanych. Narysuj wykres tej funkcji.

a) $\{(x, y)\colon |x + 3| \geq 1 \text{ i } y = -x\}$

b) $\{(x, y)\colon |x - 2| < 2 \text{ i } y = x - 1\}$

Literatura:

Ad (2) Kurczab, M., Kurczab, E., Świda E. (2015). Textbook: „Mathematics 1 to secondary and technical schools”, Wydanie IV, Warszawa, s. 286,

Ad (3) Kurczab, M., Kurczab, E., Świda E. (2014)., Matematyka 1, Zbiór zadań do liceów i techników, [Mathematics 1 - task book to secondary and technical schools], Wydanie III, Warszawa, 2014, s.203.

Co to jest funkcja? Czym jest reprezentacja?

Wspólna dyskusja na temat Ulotki 2

&

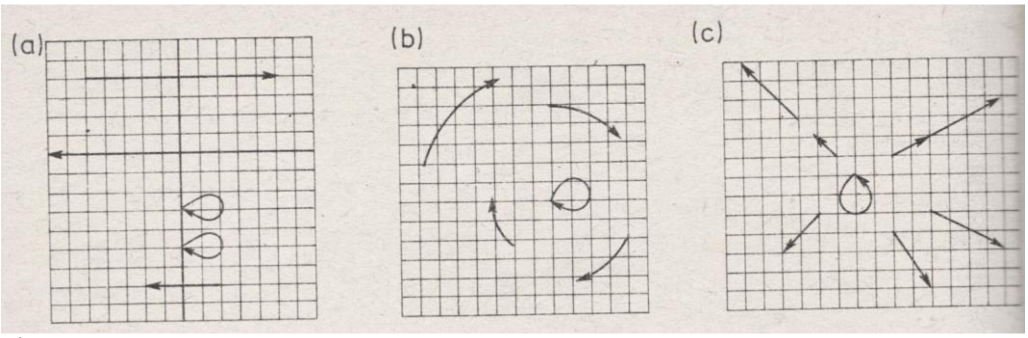
Dyskusja na temat własnych definicji (15 minut)

Aktywność 6. Spis reprezentacji pojęcia funkcji

Zwracamy uwagę, że na poziomie uniwersyteckim szczególnie zdefiniowany zbiór par może być definicją, a nie reprezentacją funkcji.
Do listy reprezentacji z podręcznika dodajemy brakujące.

Wykładowca udostępnia Teaser Video "Nomograms".

Pre-service teachers reflect individually on Handout 3.



Źródło: Turnau, S. (1990). Wyklady o nauczaniu matematyki, WSiP, Warszawa, s. 178

- Jakie przekształcenie jest reprezentowane przez poniższe wykresy?
- Jak nazywamy takie wykresy?
- Czy przekształcenia przedstawione w ten sposób są funkcjami?

Podsumowanie:

- Czy transformacje przedstawione w ten sposób są funkcjami?
  - Tak
- Jak nazywamy takie wykresy?
  - wykresy punktowo-strzałkowe

Aktywność 7. Czy definicja funkcji jest poprawna? Dyskusja na temat własnych definicji Uczestnicy kursu (z aktywności 4)

Metoda prawda-fałsz. Wykładowca odczytuje anonimowe definicje sformułowane w ćwiczeniu 4. Każdy pokazuje rękę przed sobą, oceniając poprawność tej definicji. Prowadzący wskazuje osoby do podania argumentów za/przeciw poprawności definicji.

Aktywność 8. Wykładowca może poruszyć temat definicji funkcji liniowej – prezentacja z przykładami wypowiedzi uczniów. Czy definicja funkcji jest poprawna?