Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Jednym słowem:
JAKI JEST CEL EDUKACJI MATEMATYCZNEJ?

Jednym słowem:
JAKI JEST CEL EDUKACJI MATEMATYCZNEJ?

MYŚLENIE

4 zadania

- Rozwiąż cztery poniższe zadania, każdy na kilka sposobów (możesz zastanowić się, jak rozwiązaliby go młodsi lub starsi uczniowie)
- Podczas rozwiązywania zastanów się nad następującymi pytaniami:
  - Co odróżnia poszczególne rozwiązania?
  - W czym rozwiązania poszczególnych zadań są podobne?
  - Jaka wiedza i umiejętności są potrzebne do rozwiązania tych zadań?

Zadanie: Świeczka

Mamy następującą sytuację:

„Zapalamy świeczkę, która ma początkowo 24 cm wysokości. Co godzinę jej wysokość zmniejsza się o 2 cm."

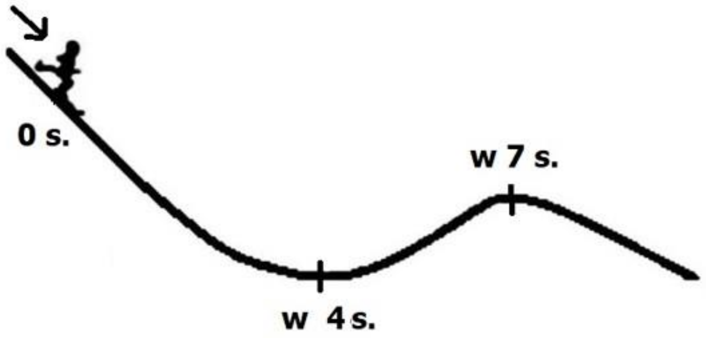
Jak można matematycznie opisać tę sytuację?

Aktywność:

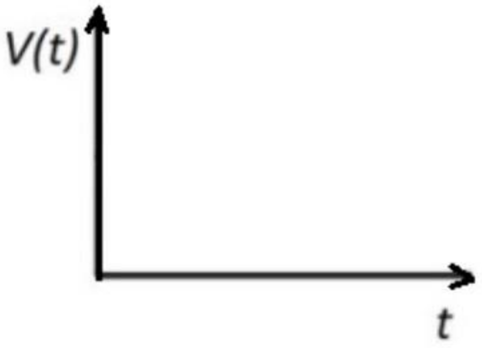
- **Proszę rozwiązać zadanie na kilka sposobów.**
- **Proszę zapisać swoje rozwiązania.**

Zadanie: Narciarz

Narciarz ma już prędkość początkową w czasie 0 sekund, a następnie pozwala sobie na ślizganie się w dół wzgórza bez celowego hamowania.



A. Kiedy jest szybszy: w sekundzie 4 czy 7?
B. Opisz słowami, jak zmienia się jego prędkość w czasie.
C. Naszkicuj, jak może wyglądać wykres szybkości narciarza (v) w czasie (t). Uzasadnij swoją odpowiedź.



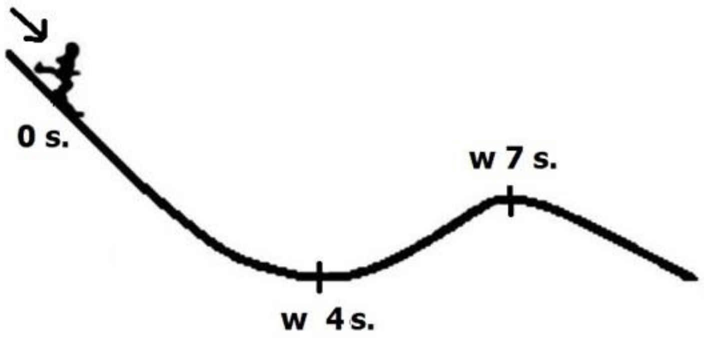
Aktywność:

- **Proszę rozwiązać zadanie na kilka sposobów.**
- **Proszę zapisać swoje rozwiązania.**

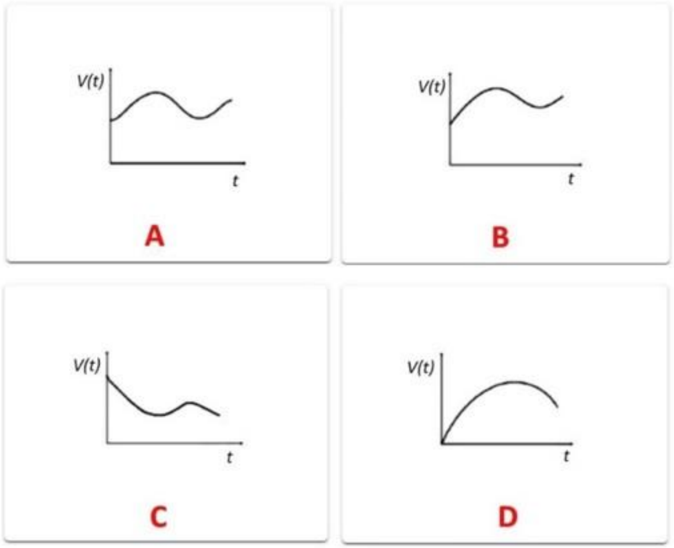
(porovnaj Barzel & Ruchniewicz, 2020, s. 9)

Zadanie: Narciarz ver. 2

Narciarz ma już prędkość początkową w czasie 0 sekund, a następnie pozwala sobie na ślizganie się w dół wzgórza bez celowego hamowania (tarcie pomijamy).



A. Kiedy jest szybszy: w sekundzie 4 czy 7?
B. Opisz słowami, jak zmienia się jego prędkość w czasie.
C. Który z wykresów szybkości (v) w czasie (t) najlepiej przedstawia zjazd narciarza z tego stoku. Uzasadnij swoją odpowiedź.



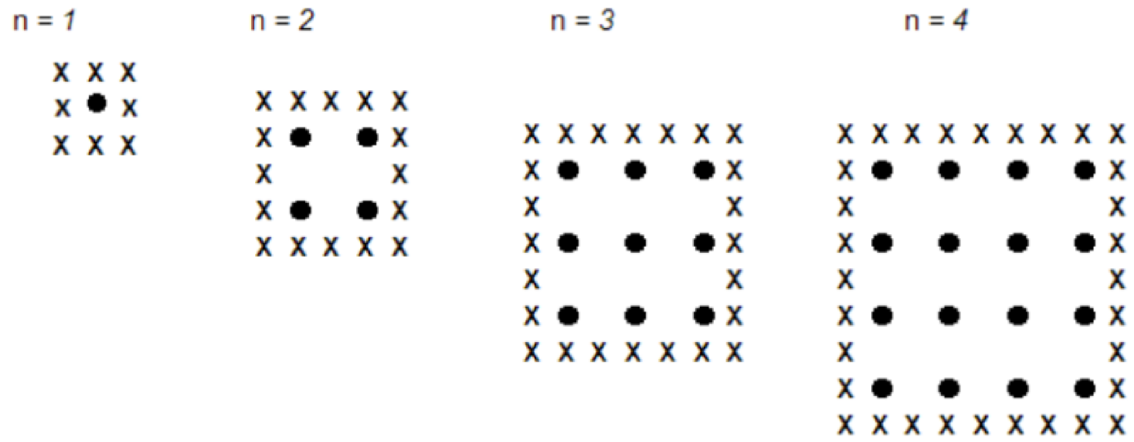
Aktywność:

- **Proszę rozwiązać zadanie na kilka sposobów.**
- **Proszę zapisać swoje rozwiązania.**

(porovnaj Barzel & Ruchniewicz, 2020, s. 9)

Zadanie: Sad

Rolnik sadzi jabłonie w układzie kwadratowym. Aby chronić drzewa przed wiatrem, sadzi wokół sadu drzewa iglaste.
Oto diagram tej sytuacji, na którym widać układ jabłoni i iglaków dla dowolnej liczby (n) rzędów jabłoni:



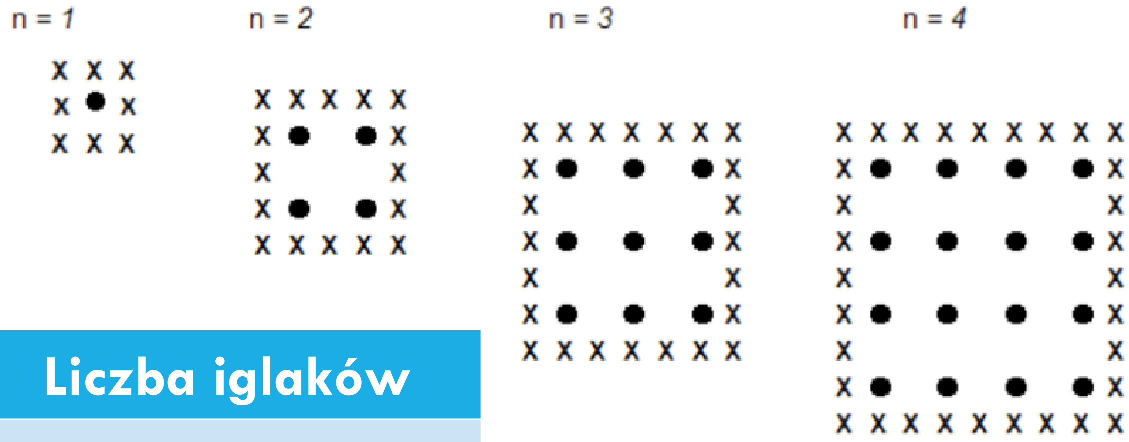
Dla jakiego n liczba jabłoni i liczba drzew iglastych jest taka sama?

Aktywność:

- **Proszę rozwiązać zadanie na kilka sposobów.**
- **Proszę zapisać swoje rozwiązania.**

Zadanie: Sad ver. 2

Rolnik sadzi jabłonie w układzie kwadratowym. Aby chronić drzewa przed wiatrem, sadzi wokół sadu drzewa iglaste.
Oto diagram tej sytuacji, na którym widać układ jabłoni i iglaków dla dowolnej liczby (n) rzędów jabłoni:



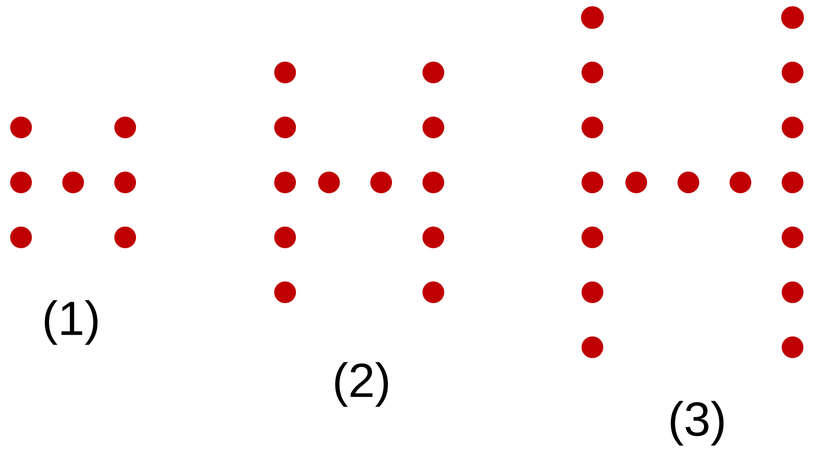
n	Liczba jabłoni	Liczba iglaków
1	1	8
2		
…	…	…

Dla jakiego n liczba jabłoni i liczba drzew iglastych jest taka sama?

Aktywność:
- **Proszę rozwiązać zadanie na kilka sposobów.**
- **Proszę zapisać swoje rozwiązania.**

Zadanie: Żetony

Emil ułożył z żetonów trzy pierwsze figury według pewnego wzorca:



A. Jaka będzie liczba żetonów w piątej figurze?

B. W celu wyznaczenia liczby żetonów dla każdej figury można zastosować jeden z trzech poniższych wzorów.

Który wzór powinien wybrać Emil? Proszę zaznaczyć poprawną odpowiedź

- ☐ $z = n + 6$
- ☐ $z = 5n + 2$
- ☐ $z = 3n + 4$

n - numer figury

z - liczba żetonów

Aktywność:

- **Proszę rozwiązać zadanie na kilka sposobów.**
- **Proszę zapisać swoje rozwiązania.**

Aspekty funkcji i różne reprezentacje

Dyskusja:

Co odróżnia poszczególne rozwiązania?

W jaki sposób rozwiązania poszczególnych zadań są podobne?

Wykorzystane reprezentacje.

Sposoby podejścia do badania funkcji.

Aspekty rozumienia pojęcia funkcji.

Aspekty funkcji i różne reprezentacje

Dyskusja:

Jaka wiedza i umiejętności są potrzebne do rozwiązania tych zadań?

Uczniowie muszą opisywać i interpretować zależności funkcyjne **w różnych reprezentacjach**.
W konsekwencji: łączyć, zmieniać i stosować elastycznie te reprezentacje.

Uczniowie używają **różnych podejść do badania** funkcji

Uczniowie muszą rozpatrywać zależności funkcyjne **z różnych perspektyw / aspektów**.

Reprezentacje

Reprezentacje:

- są pojęciami wtórnymi względem pojęcia funkcji, są tylko „podpórką dla myśli”
  (M. Klakla, 2003; Z. Semadeni 2002)
- nie można utożsamiać żadnej z reprezentacji tego pojęcia z samym pojęciem funkcji
  (A. Sierpińska, 1992)

Jakie jest znaczenie i rola reprezentacji?

Dostęp do obiektu matematycznego, który jest potrzebny do tworzenia pojęć i rozwiązywania problemów
(Pittalis et al., 2020; Hußmann & Laakman, 2011)

- Zrozumienie
- Powiązanie
- Zmiana

Reprezentacje

Co to znaczy reprezentacja pojęcia funkcji?

- z punktu widzenia psychologii nauczania matematyki reprezentacje
  - enaktywne,
  - ikoniczne,
  - symboliczne

    (wg J. Brunera, 1978)
- z punktu widzenia matematyki
  - formy powierzchniowe

    (wg Z. Semadeniego, 2002)

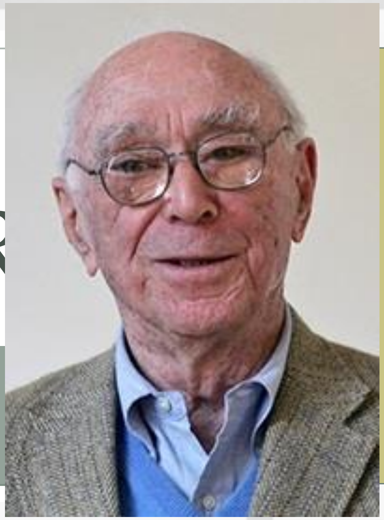
Jakie jest znaczenie i rola reprezentacji?

Dostęp do obiektu matematycznego, który jest potrzebny do tworzenia pojęć i rozwiązywania problemów

(Pittalis et al., 2020; Hußmann & Laakman, 2011)

- Zrozumienie
- Powiązanie
- Zmiana

1. JEROME SEYMOUR BRUNER



RODZAJE REPREZENTACJI POJĘĆ

- Jeden z głównych przedstawicieli psychologii poznania.
- W pracy „Proces kształcenia" przedstawił dynamiczną koncepcję edukacji, podkreślając rolę i warunki pobudzania działalności poznawczej dzieci i młodzieży oraz rozwoju pozytywnej motywacji.

REPREZENTACJE wg BRUNERA

wg Brunera rozwój intelektualny polega na przechodzeniu przez 3 rodzaje reprezentacji oraz na zdolności ich integrowania, a także swobodnego przechodzenia z jednej reprezentacji na inną.

1) ENAKTYWNE (KONKRETNE)

2) IKONICZNE

<u>Dopiero potem:</u>

3) SYMBOLICZNE

Reprezentacja enaktywna

zdarzenia reprezentowane w formie schematów działań

Reprezentacja ikoniczna

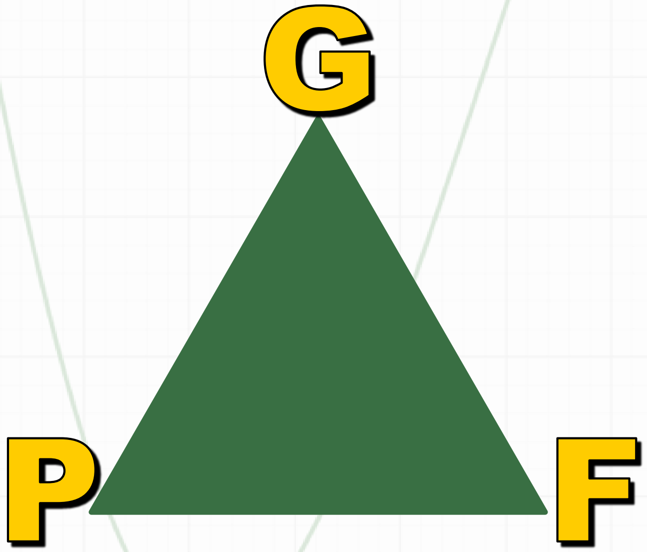
zdarzenia reprezentowane w postaci syntetycznych obrazów

Reprezentacja symboliczna

reprezentowanie sensu zdarzeń za pomocą słów lub innych symboli

SEMADENI 2002

- Semadeni w swoich artykułach (2002a, 2002b) zdefiniował pojemny pomocniczy termin:
  - *twór matematyczny* - dowolne matematyczne pojęcie, zdanie logiczne, forma zdaniowa, twierdzenie, dowód, fragment wnioskowania, struktura, procedura lub algorytm.
- W koncepcji swojej Semadeni stwierdził, że typowy *twór matematyczny*, posiada **trzy interpretacje:**
  - *idea głęboka*
  - *formy powierzchniowe*
  - *modele formalne*.
- *„Idee głębokie pełnią rolę sterującą w rozumowaniach, formy powierzchniowe pełnią rolę służebną, ale też kluczową, natomiast modele formalne służą systematyzacji teorii, weryfikacji ich poprawności, lepszemu poznawaniu ich struktury, ich zakresu i ograniczeń.”* (2002a, str. 52-53).



Formy powierzchniowe
danego tworu matematycznego

- To wszelkie znaki go reprezentujące, wśród których można rozróżnić trzy kategorie:
  - znaki, które można usłyszeć (nazwy),
  - znaki, które można dotknąć (np. modele brył),
  - znaki wizualne, wśród których można rozróżnić:
    - *statyczne*
      - czyli wyrazy, symbole i gotowe rysunki widoczne w tekście książki lub statycznie na monitorze
    - oraz *dziejące się w czasie*
      - np. czynność wykonywania rysunku, przeliczania, gesty rysujące w powietrzu reprezentacje, czy dynamiczne prezentacje komputerowe.

Formy powierzchniowe
danego tworu matematycznego

- *Formy powierzchniowe* zostały też rozróżnione ze względu na cel, jakiemu służą:
  - mogą umożliwiać powstanie pojęcia – wtedy są **nazwami**,
  - mogą też być narzędziami niezbędnymi do zajmowania się matematyką
  - oraz mogą służyć do komunikowania się.
- Według autora formą powierzchniową może być sformułowanie definicji, twierdzenia, czy dowodu twierdzenia.

REPREZENTACJE POJĘCIA FUNKCJI

- Reprezentacje:
  - są pojęciami wtórnymi względem pojęcia funkcji, są tylko „podpórką dla myśli” (M. Klakla, 2003; Z. Semadeni 2002)
  - nie można utożsamiać żadnej z reprezentacji tego pojęcia z samym pojęciem funkcji (A. Sierpińska, 1992)

- Co rozumiemy przez reprezentacje pojęcia funkcji?
  - reprezentacje enaktywne, ikoniczne, symboliczne
    - (wg J. Brunera, 1978)
  - formy powierzchniowe
    - (wg Z. Semadeniego, 2002)

- Przykłady reprezentacji pojęcia funkcji

Reprezentacje

Dyskusja:

Jaka wiedza i umiejętności są potrzebne do rozwiązania tych zadań?

Uczniowie muszą opisywać i interpretować zależności funkcyjne **w różnych reprezentacjach**. W konsekwencji: łączyć, zmieniać i stosować elastycznie te reprezentacje.

Różne reprezentacje funkcji:

1. Wzory funkcji
2. Wykresy
3. Tabelki
4. Opisy słowne
5. Grafy Venna ze strzałkami
6. Nomogramy
7. Grafy punktowo-strzałkowe
8. Zbiory par uporządkowanych

Zbiory par uporządkowanych

reprezentacja funkcji czy definicja funkcji?

Sposoby opisywania funkcji

Najczęstszymi sposobami, które stosujemy do opisywania funkcji, są:

a) opis słowny
b) tabelka
c) graf
d) zbiór par uporządkowanych
e) wzór
f) wykres

(Kurczab, Kurczab, Świda, Wydanie IV, Warszawa, 2015), w którym **zbiór par przedstawiony jest jako jedna z reprezentacji pojęcia funkcji**

Zbiory par uporządkowanych

reprezentacja funkcji czy definicja funkcji?

8.10. **8.10.** Dana jest funkcja, przedstawiona w postaci zbioru par uporządkowanych. Narysuj wykres tej funkcji.

a) $\{(-2, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
b) $\{(-4, 3), (-3, 4), (-2, 0), (-1, 1), (0, 3), (2, 4)\}$
c) $\{(-3, 1), (-2, 1), (-1, 1), (0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$
d) $\{(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$

8.11. **8.11.** Dana jest funkcja, opisana za pomocą zbioru par uporządkowanych. Podaj wzór tej funkcji.

a) $\{(-2, 3), (-1, 4), (0, 5), (1, 6)\}$
b) $\{(-4, 8), (-3, 6), (1, -2), (2, -4), (3, -6), (4, -8)\}$
c) $\left\{\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{64}\right), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{27}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right), (0, 0), (2, 8), (3, 27), (4, 64)\right\}$
d) $\left\{(-8, 5), (-3, 5), \left(-\frac{1}{2}, 5\right), (3, 5), (11, 5)\right\}$

8.12. **8.12.** Dana jest funkcja, opisana za pomocą zbioru par uporządkowanych: $\{(1, 3), (-2, 7), (7, 4), (0, 0), (8, 1)\}$.

a) Podaj wartość funkcji dla argumentu 7.
b) Podaj argument funkcji, dla którego wartość funkcji wynosi 1.

8.13. **8.13.** Dana jest funkcja $f(x) = -2x^2 + 8$, gdzie $x \in \{-2, -1, 2, 3\}$.

a) Oblicz wartość funkcji f dla argumentu 2.
b) Czy istnieje taki argument funkcji f, dla którego wartość funkcji wynosi 6? Jeśli tak, to podaj ten argument.

8.14. **8.14.** Dana jest funkcja, opisana za pomocą zbioru par uporządkowanych. Narysuj wykres tej funkcji.

a) $\{(x, y): |x + 3| \geq 1 \text{ i } y = -x\}$
b) $\{(x, y): |x - 2| < 2 \text{ i } y = x - 1\}$

(Kurczab, Kurczab, Świda, Wydanie IV, Warszawa, 2015), w którym **zbiór par przedstawiony jest jako jedna z reprezentacji pojęcia funkcji**

Co to jest funkcja?

- W matematyce istnieją dwa fundamentalnie różne podejścia do definiowania pojęcia funkcji, dwie kontrastujące definicje pojęcia funkcji sformułowane przez Peano (1911) i Hausdorffa (1914):

1.

- Według Peano relacja to pewien zbiór par uporządkowanych, a z kolei funkcja to pewien specjalny typ relacji, w której jeśli para (x, y) oraz (x, z) są parami należącymi do tej relacji, to $y = z$.

2.

- Hausdorff (1914) zdefiniował najpierw produkt dowolnych zbiorów A, B jako zbiór wszystkich par uporządkowanych p = (a, b), gdzie a ϵ A i b ϵ B, a następnie napisał:
    - *(...) rozważymy pewien zbiór P takich par, mających mianowicie tę cechę, że każdy element a z A występuje na pierwszym miejscu w jednej i tylko jednej parze p z P. Każdy element a określa w ten sposób jeden i tylko jeden element b, ten właśnie, z którym w parze p = (a, b) jest złączony; ten element określony przez a, od a zależny, przyporządkowany a, oznaczamy przez b = f(a) i mówimy, że przez to w A (tzn. dla wszystkich elementów z A) została zdefiniowana pewna jednoznaczna funkcja. Dwie takie funkcje f(a), f'(a) uważamy za równe wtedy*
    i tylko wtedy, gdy przynależne zbiory par P, P' są równe, a więc dla każdego a zachodzi f(a) = f'(a)

      (Hausdorff, 1914, s. 33).

Co to jest funkcja?

- Między podejściami Peana i Hausdorffa istnieje fundamentalna różnica, której naturę filozoficzno-lingwistyczną opisuje Semadeni (2002, s. 131).
- Otóż Peano (1911) zidentyfikował funkcję **jako** specjalny typ relacji natomiast Hausdorff (1914) pisze jedynie, że **można utożsamić pojęcie funkcji i pojęcie szczególnego zbioru par**, nie stawiając jednak między nimi znaku równości.
- Wg Semadeniego jest to zasadniczy skok pojęciowy między podejściem „można utożsamić”, a definitywnym stwierdzeniem, że „funkcja jest zbiorem par”, zmienia się bowiem znaczenie tych pojęć.
- Konkluzja jest następująca: **to przyporządkowanie jest istotą pojęcia funkcji**, a możliwość przedstawienia funkcji jako podzbioru produktu jest wtórna.

Dualna natura pojęcia funkcji – proces i obiekt

- Te dwa rodzaje pojmowania, choć z pozoru wykluczające się, powinny się jednak uzupełniać i tworzyć spójną całość **– „jak dwie strony tej samej monety”**
  - **(Sfard, 1991; Sajka, 2019).**

	Structural	Operational
Function	Set of ordered pairs (Bourbaki, 1934)	Computational process or Well defined method of getting from one system to another (Skemp, 1971)

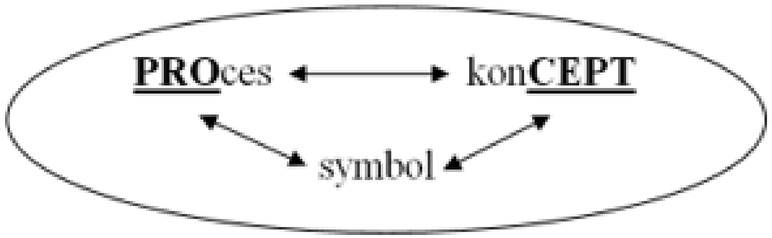
Dualna natura pojęcia funkcji – proces i obiekt

- **W rozumieniu strukturalnym funkcja może być postrzegana:**
  - jako zbiór uporządkowanych par (Bourbaki, 1934; Kuratowski & Mostowski, 1966;).
  - jako gotowy, uprzedmiotowiony obiekt.
- **W rozumieniu operacyjnym funkcja może być traktowana jako:**
  - **przyporządkowanie**
    - **(Kuratowski, 1948, s. 59; Leja, 1976, s. 30; Rudin, 1982, s. 25)**
  - **metoda przechodzenia z jednej struktury na inną**
    - **(dosłownie: *mapping*, Skemp, 1971)**
  - **proces obliczeniowy** (Sfard, 1991).

	Structural	Operational
Function	Set of ordered pairs (Bourbaki, 1934)	Computational process or Well defined method of getting from one system to another (Skemp, 1971)

„TEORIA PROCEPTÓW" Eddie Gray & Dawid Tall

ROLA SYMBOLI



- **SYMBOL** - coś, co jest postrzegane przez zmysły.
  - Symbol może być pisemny lub słowny.
- Kluczową rolę w dyskusji nad zależnościami pomiędzy procesem a konceptem odegra sposób używania symboli.
- Ważne jest JAK symbol jest interpretowany przez różne jednostki lub przez tę samą osobę w różnym czasie.
- Symbol może reprezentować zarówno proces jak i obiekt.

Symbole/reprezentacje sprzyjające strukturalnemu lub operacyjnemu rozumieniu funkcji

- Wzór funkcji: $f(x) = x - 3$ jednocześnie aktywuje rozumienie:
  - operacyjne: jak obliczyć wartość funkcji dla poszczególnych argumentów
  - i strukturalne: scala całe pojęcie funkcji dla dowolnego argumentu x.
- Wykres funkcji
  - sprzyja rozumieniu strukturalnemu,
  - ale jest przykładem obiektu zwilokrotnionego – jako opisujący „dwa pomiary jednocześnie” ijako obiekt zwielokrotniony pozwala na odtworzenie współzmienności.
- Grafy Venna
  - sprzyjają rozumieniu operacyjnemu – funkcja jako przyporządkowanie.
- Tabela funkcji
  - sprzyja rozumieniu strukturalnemu.

Trzy podejścia do badania funkcji

- **Ukierunkowanie na punkty**
  - gdy interesują nas
    - wybrane punkty wykresu
    - wartości funkcji dla pewnych argumentów,
    - miejsca zerowe itp.
- **Ukierunkowanie na przedziały**
  - gdy poszukujemy np. ekstremów lokalnych, punktów przegięcia
- **Ukierunkowanie na ogólne własności funkcji**
  - gdy analizujemy przebieg zmienności funkcji

- (Even, 1990; Sajka 2019)

Aspekty funkcji

Funkcja jako:

- **reguła przypisania wejścia-wyjścia**
  (*Function as an input-output assignment*)

- **dynamiczny proces współzmienności**
  (*Function as a dynamic process of covariation*)

- **relacja przyporządkowania**
  (*Function as a correspondence relation*)

- **obiekt matematyczny**
  (*Function as a mathematical object*)

Funkcja jako reguła przypisania wejścia-wyjścia

- Myślenie o funkcji jako maszynie wejścia-wyjścia polega na odkrywaniu lub badaniu reguły, na podstawie której wartość wejściowa ulega zmianie i otrzymujemy wartość wyjściową.
- Ten pogląd podkreśla operacyjny i obliczeniowy charakter pojęcia funkcji, dostosowanie się do konkretnych zasad, korzystanie ze wzorów oraz działanie według przepisu.

Funkcja jako dynamiczny proces współzmienności

- Myślenie o funkcji jako dynamicznym procesie współzmienności polega na jednoczesnej zmianie dwóch lub więcej zmiennych - nacisk jest położony na współzmienność zmiennej zależnej i zmiennej niezależnej.
- Funkcja jest postrzegana, jako

  „dwie wielkości zmieniające się jednocześnie w taki sposób, że istnieje niezmienniczy związek między ich wartościami, który ma tę własność, że w percepcji danej osoby każda wartość jednej wielkości określa dokładnie jedną wartość drugiej.” (Thompson & Carlson, 2017, str. 436).
- Zmienna niezależna, przebiegając przez źródłowy zbiór powoduje, że zmienna zależna przebiega przez zbiór wartości, czyli obserwujemy, jak zmieniają się argumenty z dziedziny i zbiór wartości w tym samym czasie. Pogląd ten dobrze obrazuje np. wykres zależności przebytej drogi od mijającego czasu, na którym możemy śledzić jednoczesne zmiany obu zmiennych - im więcej czasu upłynie tym większy dystans pokona dane ciało.

Funkcja jako relacja przyporządkowania

- Myślenie o funkcji jako relacji przyporządkowania polega na rozumieniu relacji, jaka występuje między zmienną niezależną i zmienną zależną oraz umiejętności jej reprezentowania.
- Pogląd ten może prowadzić do bardziej formalnej definicji funkcji jako zbioru par uporządkowanych.

Funkcja jako obiekt matematyczny

- Myślenie o funkcji jako o obiekcie matematycznym polega na przypisaniu jej własnej reprezentacji i własności.
- Obiekt ten może być porównywany z innymi obiektami matematycznymi lub funkcjami.
- Patrzenie na funkcję z tej perspektywy jest związane z badaniem własności funkcji, rozróżnianiem i charakterystyką różnych klas funkcji, operacji na funkcjach oraz znajomości samej definicji funkcji i pojęć z nią związanych.
- Funkcja jest tu postrzegana jako członek rodziny funkcji i może być poddana procesom wyższego rzędu, takim jak sumowanie, składanie, całkowanie, różniczkowanie itp., obejmującym typ reprezentacji.

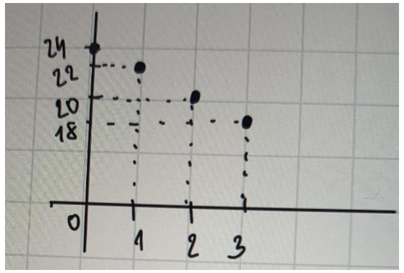
Aspekty funkcji: Wejście - wyjście

Aspekty: Malle, 2000; Pittalis et al., 2020; Vollrath, 1989

- ***Wejście-wyjście: badanie, jak pewna wartość wejściowa doprowadzi do wartości wyjściowej; szukanie***

Reprezentacje:

- Łańcuchy liczb 24 -2 22 -2 20 -2 18 -2 ... ...
- Graficzny: punkt w układzie współrzędnych



- Tabela bez postrzegania jakichkolwiek innych związków
- Wzór ***

Mamy następującą sytuację:

"Świeczka ma początkowo 24 cm wysokości. Co godzinę zmniejsza się o 2 cm."

Jak można matematycznie opisać tę sytuację?

Aspekty funkcji: Przyporządkowanie

Aspekty: Malle, 2000; Pittalis et al., 2020; Vollrath, 1989**)**

- ***Przyporządkowanie:*** rozumienie związku między zmiennymi niezależnymi i zależnymi oraz umiejętność jego przedstawienia; bardziej formalna definicja funkcji jako zbioru par uporządkowanych.

Mamy następującą sytuację:

"Świeczka ma początkowo 24 cm wysokości. Co godzinę zmniejsza się o 2 cm."

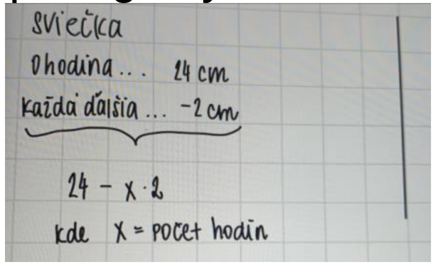
Jak można matematycznie opisać tę sytuację?

Reprezentacje :

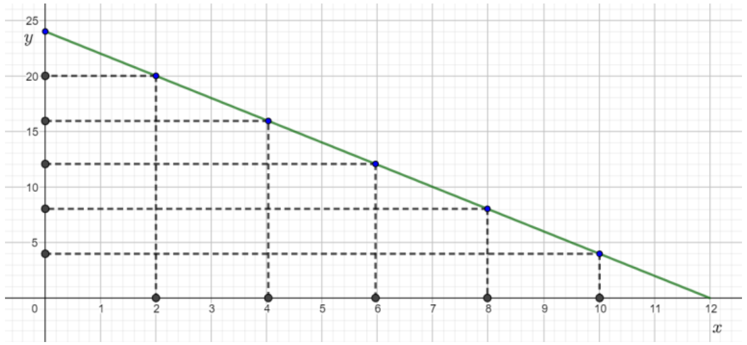
- Tabela - jeśli uczeń dostrzega poszczególne uporządkowane pary

Czas	0	1	2
Wysokość świeczki	24	22	20

- Przepis ogólny, wzór



- Wykres funkcji – reprezentacja graficzna, w której uczeń dostrzega uporządkowane pary x i $f(x)$



Aspekty funkcje: Przyporządkowanie

Aspekty: Malle, 2000; Pittalis et al., 2020; Vollrath, 1989

- ***Przyporządkowanie***: Rozumienie związku między zmiennymi niezależnymi i zależnymi oraz umiejętność jego przedstawienia; bardziej formalna definicja funkcji jako zbioru par uporządkowanych.

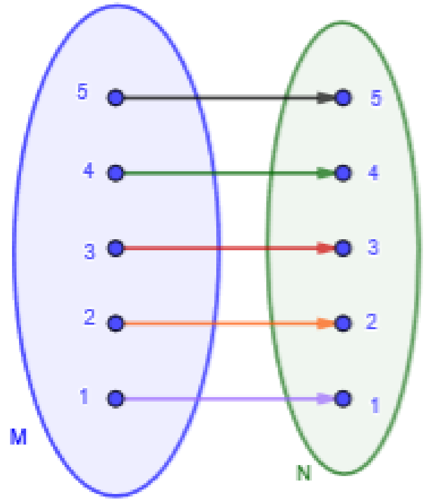
Mamy następującą sytuację:

"Świeczka ma początkowo 24 cm wysokości. Co godzinę zmniejsza się o 2 cm."

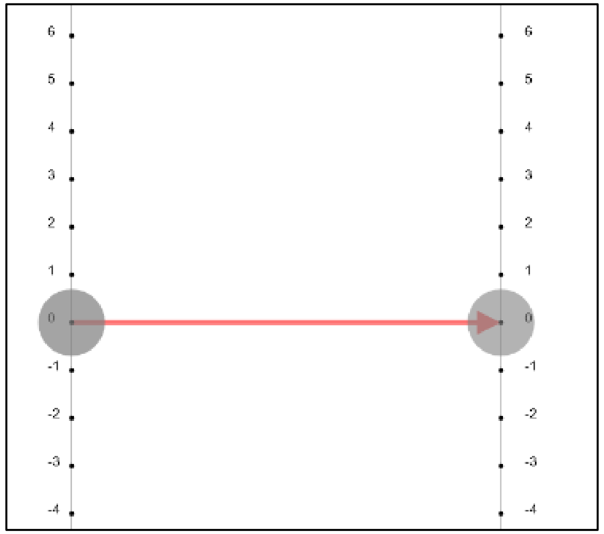
Jak można matematycznie opisać tę sytuację?

Reprezentacje:

- Grafy Venna ze strzałkami



- Nomogram



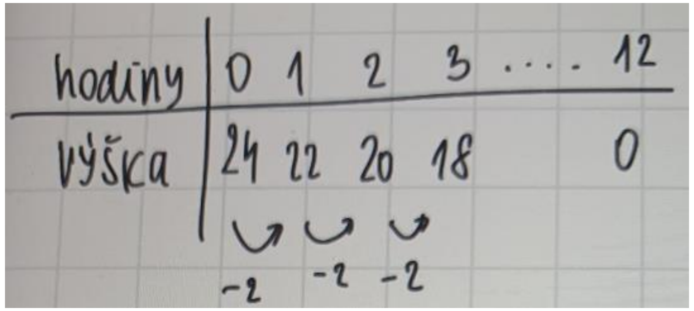
Aspekty funkcji: Współzmienność

Aspekty: Malle, 2000; Pittalis et al., 2020; Vollrath, 1989

➢ ***Współzmienność***: badanie, jak zmienia się jedna zmienna, gdy zmienia się inna.

Reprezentacje:

- Tabela - czy uczeń dostrzega zmiany w poszczególnych zmiennych



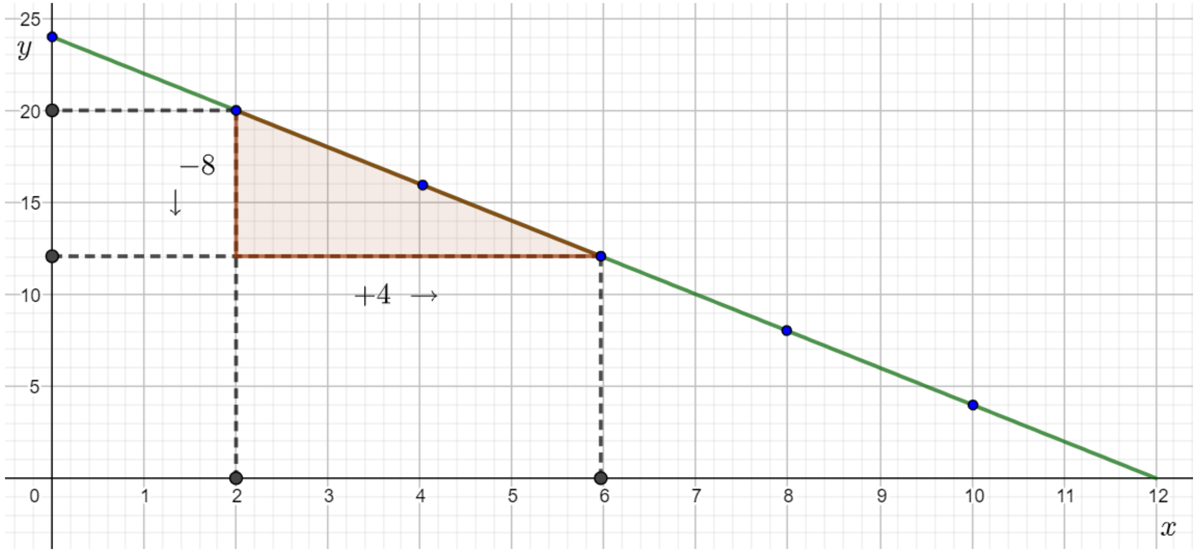
hodiny	0	1	2	3	....	12
výška	24	22	20	18		0

- Graficzna – na wykresie analiza zmian i tempa zmian
- Algebraiczna – współczynnik kierunkowy, wzór funkcji

Mamy następującą sytuację:

"Świeczka ma początkowo 24 cm wysokości. Co godzinę zmniejsza się o 2 cm."

Jak można matematycznie opisać tę sytuację?



Aspekty funkcji: Obiekt

Aspekty: Malle, 2000; Pittalis et al., 2020; Vollrath, 1989

- ***Obiekt***: funkcja jest uważana za obiekt matematyczny posiadający własne reprezentacje i własności, które mogą być porównywane z innymi obiektami matematycznymi lub funkcjami.

Mamy następującą sytuację:

"Świeczka ma początkowo 24 cm wysokości. Co godzinę zmniejsza się o 2 cm."

Jak można matematycznie opisać tę sytuację?

Reprezentacje:

- Wzór funkcji - wykorzystanie ogólnego wzoru funkcji liniowej f(x) =$ax+b$.

  Wykorzystanie własności danej funkcji (malejąca – ujemny współczynnik "a")

- Wykresy - wykorzystanie własności danej klasy funkcji (wykresem funkcji liniowej jest linia prosta).

  Wykorzystanie własności danej funkcji (malejąca - prawidłowe nachylenie prostej)

Zadanie

- Naszkicuj wykres funkcji $y = 2x - 3$.

Aktywność:

Rozwiąż zadanie w ten sposób, aby wykorzystać różne aspekty pojęcia funkcji.

Opisz proces myślowy, który masz na myśli.

Seria zadań

- Z serii zadań wybierz jedno lub dwa zadania dla każdego aspektu, które najlepiej go rozwijają.

Zadanie: Świeczka

Mamy następującą sytuację:

"Świeczka ma początkowo 24 cm wysokości. Co godzinę zmniejsza się o 2 cm."

Jak można matematycznie opisać tę sytuację?

Aktywność:

- **Proszę rozwiązać zadanie na kilka sposobów.**
- **Proszę zapisać swoje rozwiązania.**

Zadanie: Świeczka

Mamy następującą sytuację:

"Świeczka ma początkowo 24 cm wysokości. Co godzinę zmniejsza się o 2 cm."

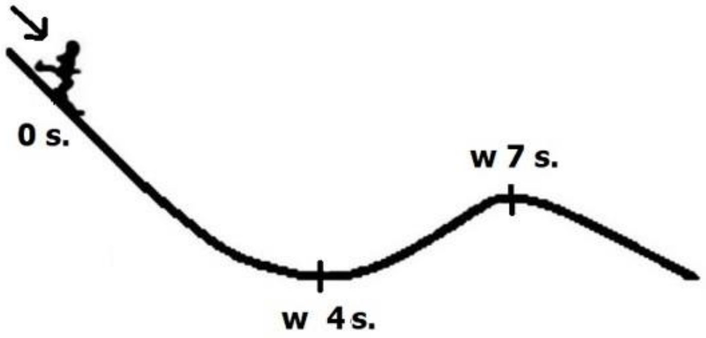
Jak można matematycznie opisać tę sytuację?

Aktywność:

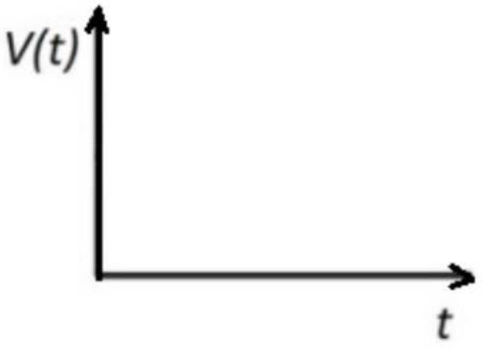
- **Proszę rozwiązać zadanie na kilka sposobów.**
- **Proszę zapisać swoje rozwiązania.**

Zadanie: Narciarz

Narciarz ma już prędkość początkową w czasie 0 sekund, a następnie pozwala sobie na ślizganie się w dół wzgórza bez celowego hamowania.



A. Kiedy jest szybszy: w sekundzie 4 czy 7?
B. Opisz słowami, jak zmienia się jego prędkość w czasie.
C. Naszkicuj, jak może wyglądać wykres szybkości narciarza (v) w czasie (t). Uzasadnij swoją odpowiedź.



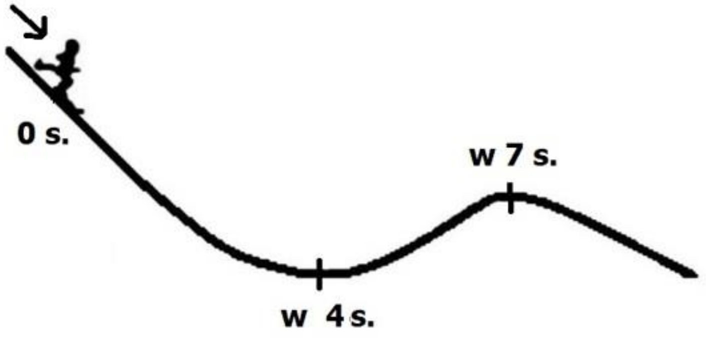
Aktywność:

- **Proszę rozwiązać zadanie na kilka sposobów.**
- **Proszę zapisać swoje rozwiązania.**

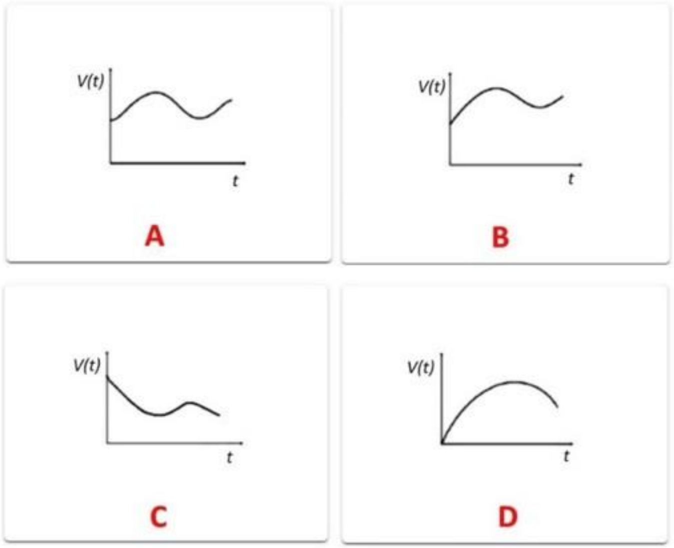
(porovnaj Barzel & Ruchniewicz, 2020, s. 9)

Zadanie: Narciarz ver. 2

Narciarz ma już prędkość początkową w czasie 0 sekund, a następnie pozwala sobie na ślizganie się w dół wzgórza bez celowego hamowania (tarcie pomijamy).



A. Kiedy jest szybszy: w sekundzie 4 czy 7?
B. Opisz słowami, jak zmienia się jego prędkość w czasie.
C. Który z wykresów szybkości (v) w czasie (t) najlepiej przedstawia zjazd narciarza z tego stoku. Uzasadnij swoją odpowiedź.



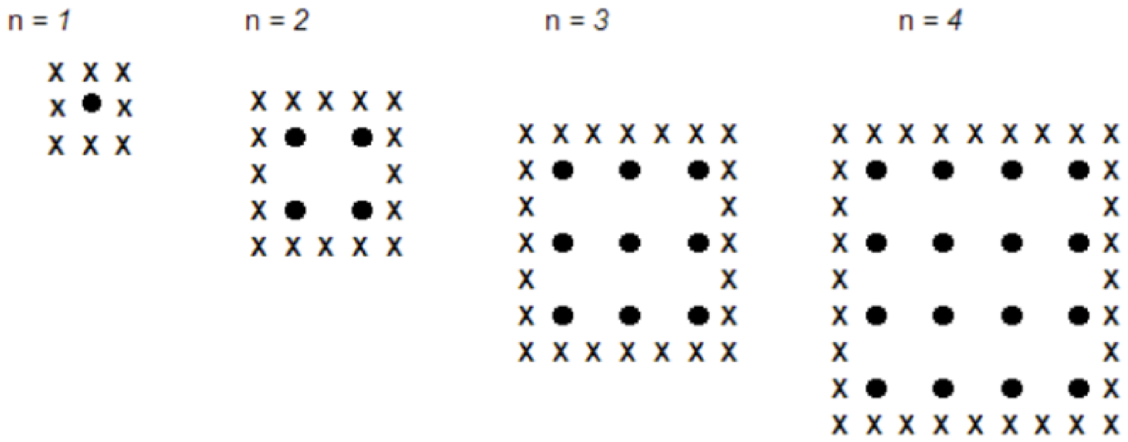
Aktywność:

- **Proszę rozwiązać zadanie na kilka sposobów.**
- **Proszę zapisać swoje rozwiązania.**

(porovnaj Barzel & Ruchniewicz, 2020, s. 9)

Zadanie: Sad

Rolnik sadzi jabłonie w układzie kwadratowym. Aby chronić drzewa przed wiatrem, sadzi wokół sadu drzewa iglaste.
Oto diagram tej sytuacji, na którym widać układ jabłoni i iglaków dla dowolnej liczby (n) rzędów jabłoni:



Dla jakiego n liczba jabłoni i liczba drzew iglastych jest taka sama?

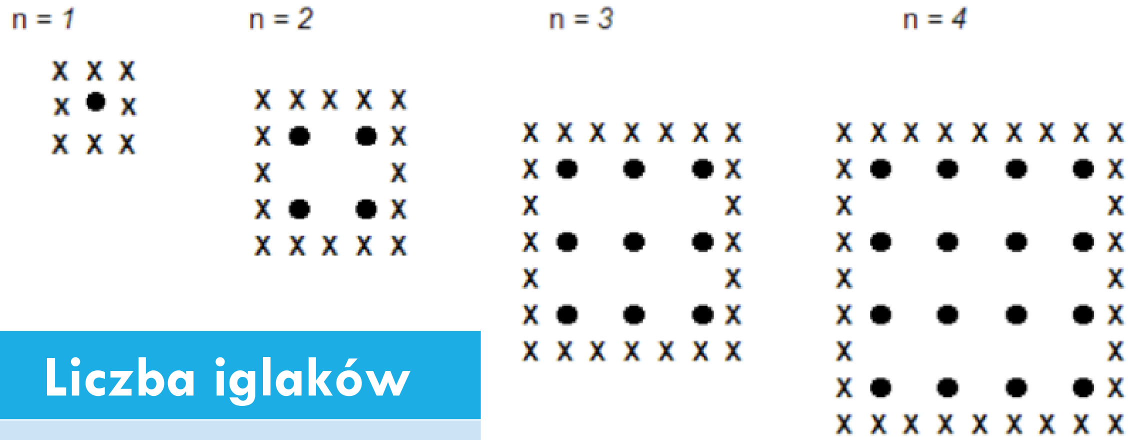
Aktywność:

- **Proszę rozwiązać zadanie na kilka sposobów.**
- **Proszę zapisać swoje rozwiązania.**

Zadanie: Sad ver. 2

Rolnik sadzi jabłonie w układzie kwadratowym. Aby chronić drzewa przed wiatrem, sadzi wokół sadu drzewa iglaste.

Oto diagram tej sytuacji, na którym widać układ jabłoni i iglaków dla dowolnej liczby (n) rzędów jabłoni:



n	Liczba jabłoni	Liczba iglaków
1	1	8
2		
…	…	…

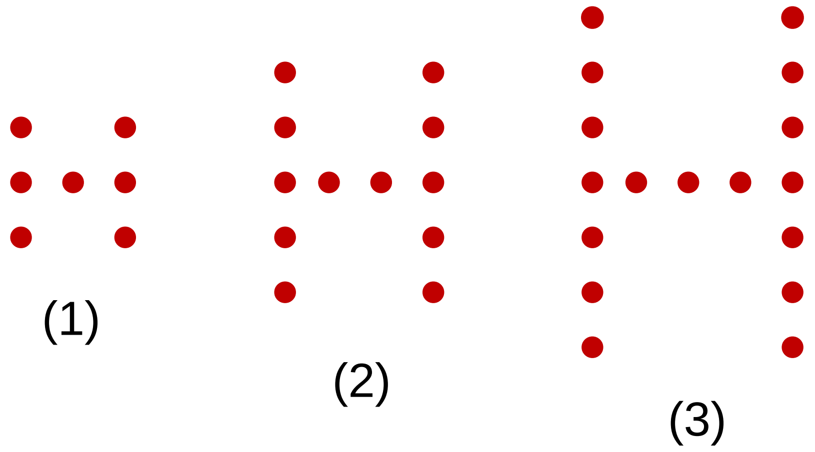
Dla jakiego n liczba jabłoni i liczba drzew iglastych jest taka sama?

Aktywność:

- **Proszę rozwiązać zadanie na kilka sposobów.**
- **Proszę zapisać swoje rozwiązania.**

Zadanie: Żetony

Emil ułożył z żetonów trzy pierwsze figury według pewnego wzorca:



A. Jaka będzie liczba żetonów w piątej figurze?

B. W celu wyznaczenia liczby żetonów dla każdej figury można zastosować jeden z trzech poniższych wzorów.

Który wzór powinien wybrać Emil? Proszę zaznaczyć poprawną odpowiedź

- ☐ $z = n + 6$
- ☐ $z = 5n + 2$
- ☐ $z = 3n + 4$

n - numer figury

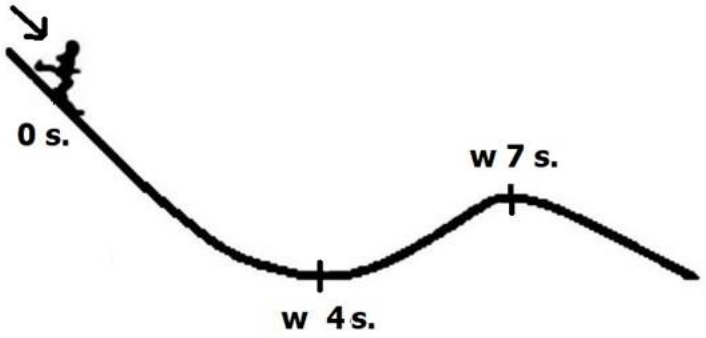
z - liczba żetonów

Aktywność:

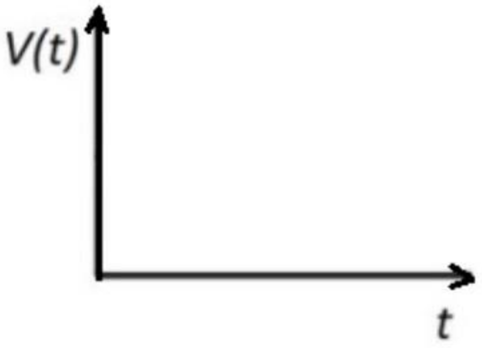
- **Proszę rozwiązać zadanie na kilka sposobów.**
- **Proszę zapisać swoje rozwiązania.**

Zadanie: Narciarz

Narciarz ma już prędkość początkową w czasie 0 sekund, a następnie pozwala sobie na ślizganie się w dół wzgórza bez celowego hamowania.



A. Kiedy jest szybszy: w sekundzie 4 czy 7?
B. Opisz słowami, jak zmienia się jego prędkość w czasie.
C. Naszkicuj, jak może wyglądać wykres szybkości narciarza (v) w czasie (t). Uzasadnij swoją odpowiedź.



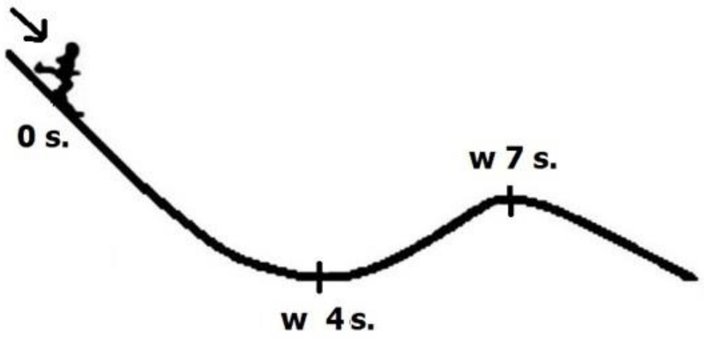
Aktywność:

- **Proszę rozwiązać zadanie na kilka sposobów.**
- **Proszę zapisać swoje rozwiązania.**

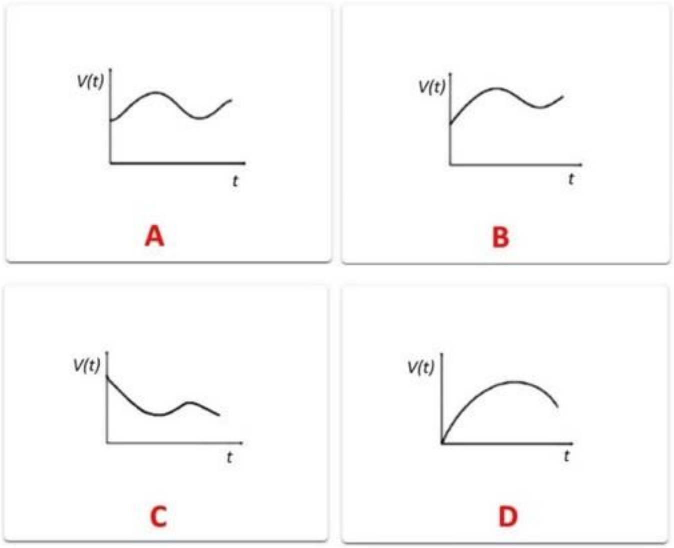
(porovnaj Barzel & Ruchniewicz, 2020, s. 9)

Zadanie: Narciarz ver. 2

Narciarz ma już prędkość początkową w czasie 0 sekund, a następnie pozwala sobie na ślizganie się w dół wzgórza bez celowego hamowania (tarcie pomijamy).



A. Kiedy jest szybszy: w sekundzie 4 czy 7?
B. Opisz słowami, jak zmienia się jego prędkość w czasie.
C. Który z wykresów szybkości (v) w czasie (t) najlepiej przedstawia zjazd narciarza z tego stoku. Uzasadnij swoją odpowiedź.



Aktywność:

- **Proszę rozwiązać zadanie na kilka sposobów.**
- **Proszę zapisać swoje rozwiązania.**

(porovnaj Barzel & Ruchniewicz, 2020, s. 9)

Definicja funkcji

Zapoznaj się z poniższymi definicjami funkcji i zastanów się nad nimi:

- Na jakim aspekcie opiera się podana definicja?
- Na czym polega jednoznaczne podanie funkcji?

Definicja funkcji

- 1. [XVIII stulecie]

Funkcją określoną na zbiorze D nazywamy dowolny przepis, który każdemu elementowi zbioru D przypisuje dokładnie jedną liczbę rzeczywistą. Zbiór D nazywamy dziedziną funkcji.

- 2. [początek XX wieku]

Funkcja jest mapowaniem z dowolnego zbioru na podzbiór R.

- 3. [XX w]

Niech M będzie dowolnym zbiorem, R zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych. Funkcją nazywamy dowolny zbiór f uporządkowanych par $[x, y]$ należących do MxR, dla którego zachodzi następująca zależność: do każdego x ze zbioru M istnieje dokładnie jedno takie y ze zbioru R takie, że $[x, y]$ należy do f. Zbiór M nazywamy dziedziną definicji funkcji f. Oznaczamy go przez D(f).

Definicja funkcji

- 4. (SP na Słowacji od 1991)

Funkcją f nazywamy takie przyporządkowanie, które każdemu elementowi zbioru D przypisuje dokładnie jedną liczbę rzeczywistą. Zbiór D nazywamy dziedziną funkcji f. Funkcja f jest dana wzorem albo tabelą lub wykresem.

- 5. (LO na Słowacji od 1990)

Funkcją na zbiorze A nazywamy przepis, który każdemu elementowi zbioru A przypisuje dokładnie jedną liczbę rzeczywistą. Zbiór A nazywamy dziedziną funkcji.

- 6. (przegląd matematyki w szkołach średnich na Słowacji – 1963)

Niech M będzie pewnym zbiorem liczb rzeczywistych. Niech każdemu x z M zostanie przypisana jedna liczba rzeczywista y zgodnie z jakąś regułą. Mówimy wtedy, że na zbiorze M jest określona funkcja jednej zmiennej.

Definicja funkcji

- 7. (podręczniki dla szkół średnich i średnich szkół zawodowych na Słowacji)

Odwzorowaniem f zbioru A na zbiór B nazywamy dowolny zbiór uporządkowanych par $[x,y]$ takich, że z każdym $x \in A$ związany jest tylko jeden $y \in A$ taki, że $[x,y] \in f$

Funkcją nazywamy dowolne odwzorowanie ze zbioru M na zbiór R, gdzie M jest dowolnym podzbiorem R.

- 8. (LO na Słowacji do 1990)

Niech M będzie zbiorem dowolnym, R - zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych. Funkcją nazywamy każdy zbiór f uporządkowanych par $[x,y]$, dla którego zachodzi następująca zależność: do każdego $x \in M$ istnieje dokładnie jeden y$\in R$ taki, że $[x,y] \in f$. M nazywamy dziedziną funkcji.

- 9. (LO na Słowacji, od 2010)

... w matematyce na oznaczenie takiej jednoznacznej zależności między dwiema zmiennymi używa się terminu funkcja. Aby można było powiedzieć, że druga zmienna jest funkcją pierwszej zmiennej, muszą być spełnione dwa warunki :

- Wartość drugiej zmiennej jest jednoznacznie zdeterminowana przez wartość pierwszej zmiennej (tzn. dwóm lub więcej różnym wartościom drugiej zmiennej nie można przypisać jednej wartości pierwszej zmiennej),
- Wartości drugiej zmiennej muszą być liczbami.

Definicja funkcji liniowej

Przejrzyj poniższe definicje funkcji liniowej i zastanów się nad nią:

- Które z definicji są poprawne?
- Jakie problemy widzisz w pozostałych definicjach?

A:

Lineární funkce je každá funkce, která jde zapsat ve tvaru $y = ax + b$, kde $a, b \in R$. Grafem lineární funkce je přímka (část přímky).

B:

Dobre, môžeme zhrnúť definíciu lineárnej funkcie takto: ***Lineárnou funkciou nazývame každú funkciu danú rovnicou***

$$y = ax + b,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$, definičným oborom je množina $\mathbb{R}$.

C:

Definícia

Lineárnou funkciou sa nazýva každá funkcia daná rovnicou

$$y = ax + b \qquad (1)$$

kde a, b sú reálne čísla.

Definičným oborom lineárnej funkcie je množina všetkých reálnych čísel.

D:

Lineární funkce je každá funkce na množině R (tj. funkce o definičním oboru R), která je dána ve tvaru

$$y = ax + b, \qquad (1)$$

kde a, b jsou reálná čísla.

E:

lineárna funkcia má predpis tvaru $y = kx + q$ (k, q sú konštanty – dané čísla)

F:

Funkcia typu $\boldsymbol{y = kx + q}$, kde k a q sú ľubovoľné reálne čísla a jej definičný obor je množina všetkých reálnych čísel, sa nazýva **lineárna funkcia**.

Graf lineárnej funkcie **je priamka** alebo jej časť (ak je definičný obor obmedzený).

A:

Lineární funkce je každá funkce, která jde zapsat ve tvaru $y = ax + b$, kde $a, b \in R$. Grafem lineární funkce je přímka (část přímky).

B:

Dobre, môžeme zhrnúť definíciu lineárnej funkcie takto: ***Lineárnou funkciou nazývame každú funkciu danú rovnicou***

$$y = ax + b,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$, definičným oborom je množina $\mathbb{R}$.

C:

Definícia

Lineárnou funkciou sa nazýva každá funkcia daná rovnicou

$$y = ax + b \qquad (1)$$

kde a, b sú reálne čísla.

Definičným oborom lineárnej funkcie je množina všetkých reálnych čísel.

D:

Lineární funkce je každá funkce na množině R (tj. funkce o definičním oboru R), která je dána ve tvaru

$$y = ax + b, \qquad (1)$$

kde a, b jsou reálná čísla.

E:

sú lineárne závislé.

lineárna funkcia má predpis tvaru $y = kx + q$ (k, q sú konštanty – dané čísla)

F:

Funkcia typu $y = kx + q$, kde k a q sú ľubovoľné reálne čísla a jej definičný obor je množina všetkých reálnych čísel, sa nazýva **lineárna funkcia**.

Graf lineárnej funkcie **je priamka** alebo jej časť (ak je definičný obor obmedzený).

A:

Lineární funkce je každá funkce, která jde zapsat ve tvaru $y = ax + b$, kde $a, b \in R$. Grafem lineární funkce je přímka (část přímky).

B:

Dobre, môžeme zhrnúť definíciu lineárnej funkcie takto: ***Lineárnou funkciou nazývame každú funkciu danú rovnicou***

$$y = ax + b,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$, definičným oborom je množina $\mathbb{R}$.

C:

Definícia

Lineárnou funkciou sa nazýva každá funkcia daná rovnicou

$$y = ax + b \qquad (1)$$

kde a, b sú reálne čísla.

Definičným oborom lineárnej funkcie je množina všetkých reálnych čísel.

D:

Lineární funkce je každá funkce na množině R (tj. funkce o definičním oboru R), která je dána ve tvaru

$$y = ax + b, \qquad (1)$$

kde a, b jsou reálná čísla.

E:

sú lineárne závislé.

lineárna funkcia má predpis tvaru $y = kx + q$ (k, q sú konštanty – dané čísla)

F:

Funkcia typu $\boldsymbol{y = kx + q}$, kde k a q sú ľubovoľné reálne čísla a jej definičný obor je množina všetkých reálnych čísel, sa nazýva **lineárna funkcia**.

Graf lineárnej funkcie **je priamka** alebo jej časť (ak je definičný obor obmedzený).

Enhancing functional thinking from primary to upper secondary school

A:

Lineární funkce je každá funkce, která jde zapsat ve tvaru $y = ax + b$, kde $a, b \in R$. Grafem lineární funkce je přímka (část přímky).

B:

Dobre, môžeme zhrnúť definíciu lineárnej funkcie takto: ***Lineárnou funkciou nazývame každú funkciu danú rovnicou***

$$y = ax + b,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$, definičným oborom je množina $\mathbb{R}$.

D:

Lineární funkce je každá funkce na množině R (tj. funkce o definičním oboru R), která je dána ve tvaru

$$y = ax + b, \qquad (1)$$

kde a, b jsou reálná čísla.

C:

Definícia

Lineárnou funkciou sa nazýva každá funkcia daná rovnicou

$$y = ax + b \qquad (1)$$

kde a, b sú reálne čísla.

Definičným oborom lineárnej funkcie je množina všetkých reálnych čísel.

E:

lineárna funkcia má predpis tvaru $y = kx + q$ (k, q sú konštanty – dané čísla)

F:

Funkcia typu $\boldsymbol{y = kx + q}$, kde k a q sú ľubovoľné reálne čísla a jej definičný obor je množina všetkých reálnych čísel, sa nazýva **lineárna funkcia**.

Graf lineárnej funkcie **je priamka** alebo jej časť (ak je definičný obor obmedzený).

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Rozwijanie myślenia funkcyjnego uczniów

Wprowadzenie do scenariuszy lekcji

(tzw. learning environments)

Co to jest myślenie funkcyjne?

- **Podstawowa aktywność związana z pracą nad funkcjami**

  (Vollrath, 1986)
- **Sposób myślenia o relacjach, współzależnościach i zmianach**

  (Vision document, FunThink project)

Agenda

- **4 Zasady projektowania**
- **Scenariusze lekcji „Learning environments”**
    - ➢Informacje ogólne
    - ➢Eksploracja scenariuszy „learning environments”
- **Cele nauczania :**
    - ➢ Poznaj cztery zasady projektowania (więcej później).
    - ➢ Zapoznanie się ze strukturą scenariuszy środowisk uczenia się za pomocą materiałów informacyjnych i przewodnika dla nauczyciela.Określenie celów edukacyjnych środowisk uczenia się i powiązanie ich z podstawowymi koncepcjami myślenia funkcjonalnego.

Zasady projektowania lekcji

INQUIRY BASED LEARNING
=
NAUCZANIE PRZEZ ODKRYWANIE, PRZEZ DOCIEKANIE

SITUATEDNESS
=
SYTUACYJNOŚĆ

EMBODIMENT
=
UCIELEŚNIENIE

(DIGITAL) TOOLS
=
NARZĘDZIA (CYFORWE)

Zasada: nauczania przez badanie (inquiry based learning - IBE)

Cykl badawczy 5E

Engagement, Exploring, Explaining, Elaborating, Evaluating

- Ciekawość i krytyczne myślenie
- Konstruowanie i stosowanie nowej wiedzy
- Współpraca i komunikacja

Uczniowie formułują pytania
i poszukują na nie odpowiedzi

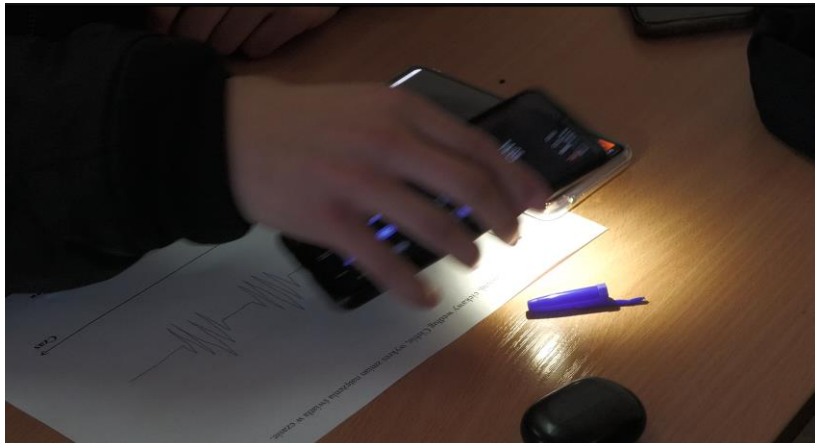
Więcej informacji można znaleźć np.,
Dorier & Maass, 2020; Artigue & Blomhøj, 2013

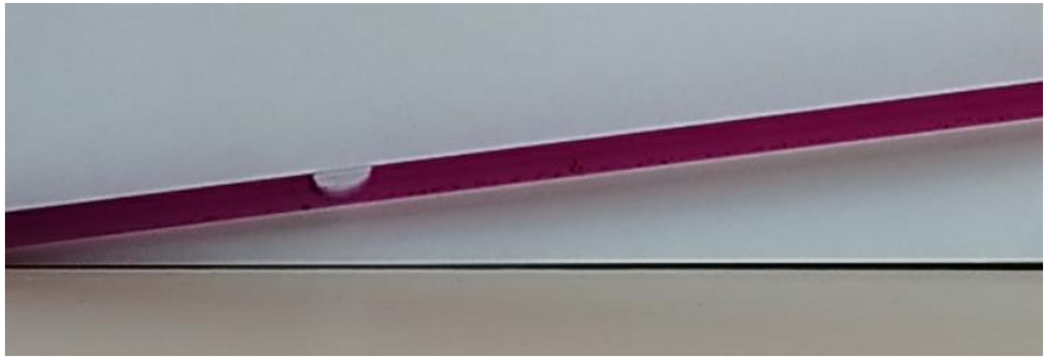
Zasada: sytuacyjność

O pojęciu funkcji:

Stwierdzanie, postulowanie, tworzenie, odtwarzanie zależności (lub związków) pomiędzy zmiennymi występującymi w świecie fizycznym, społecznym, psychicznym, czyli w tych światach i pomiędzy nimi.

(Freudenthal, 1983, s. 494)



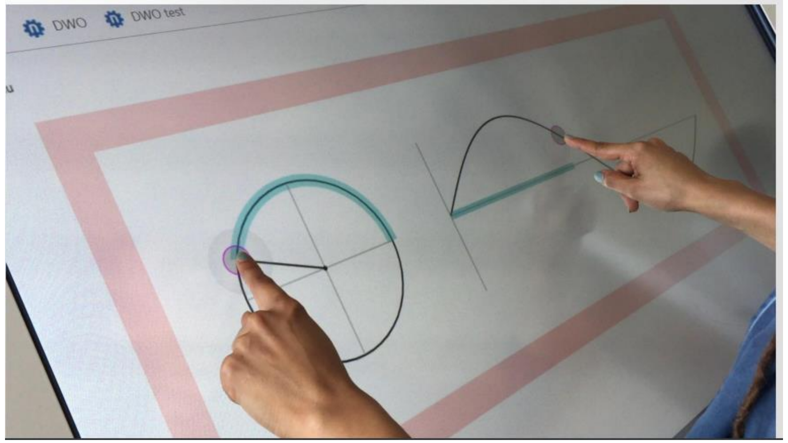


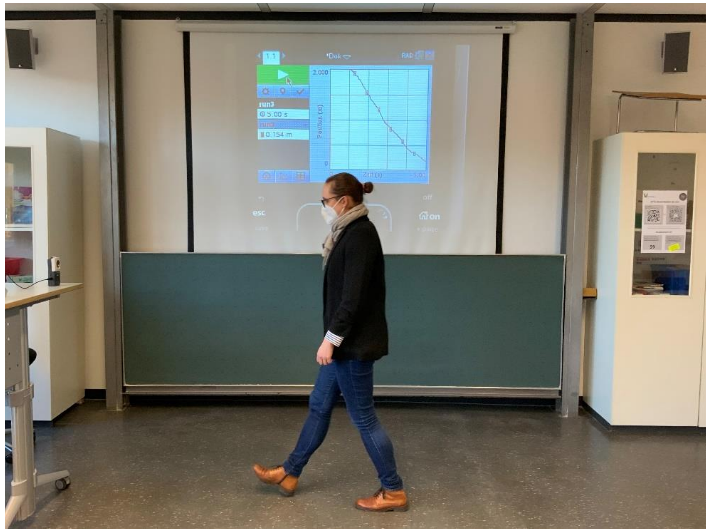
Więcej informacji można znaleźć np. Gravemeijer & Terwel, 2000.

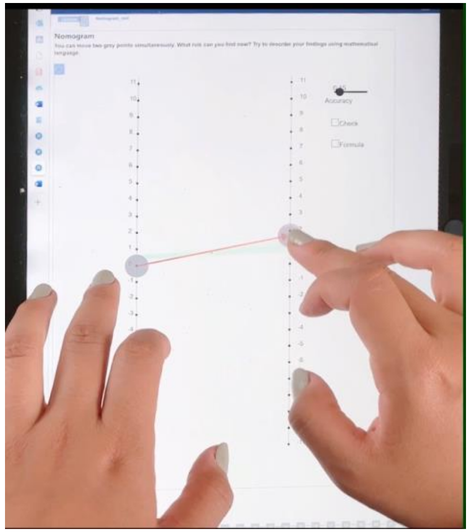
Zasada: embodiment = ucieleśnienie

Główne idee:

- Wszystko, co (świadomie) napotykamy i postrzegamy staje się częścią wiedzy
- Doświadczenia ucieleśnienia są niezbędne dla poznania
- Rozumienie matematyki może być oparte na ucieleśnionych doświadczeniach i ruchach





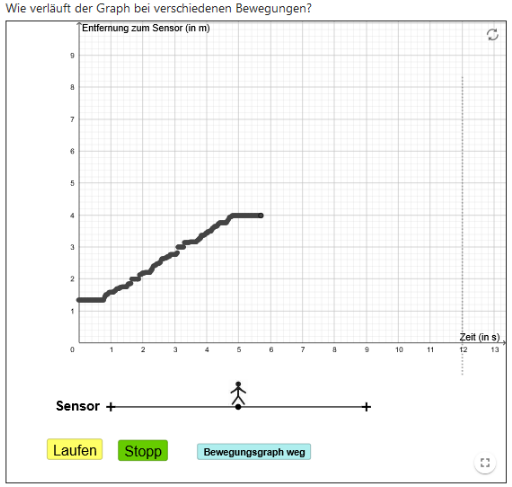


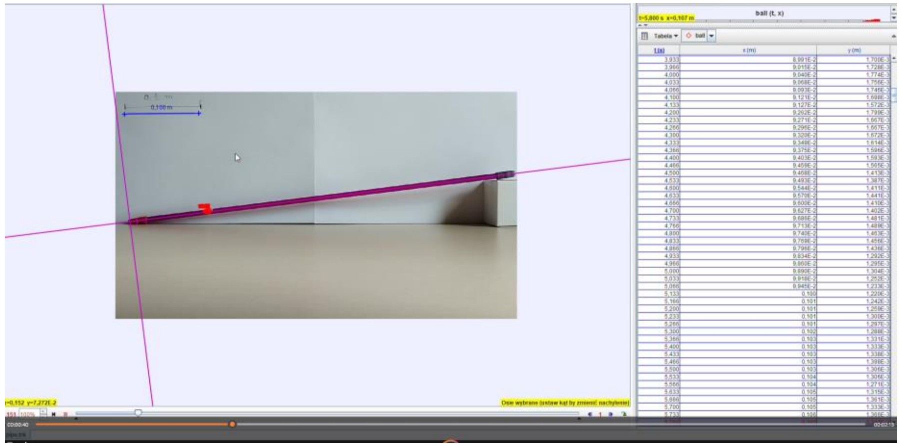
Więcej informacji na ten temat można znaleźć np. Duijzer et al., 2019; Lakoff & Nunez, 2000

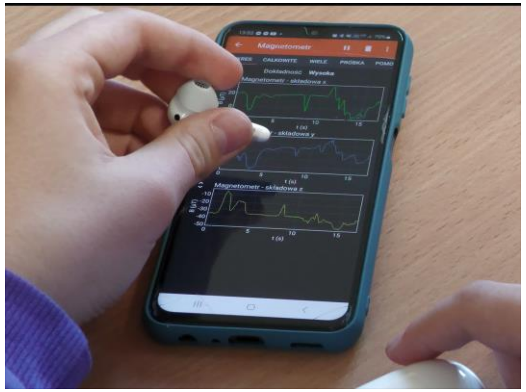
Zasada: narzędzia cyfrowe

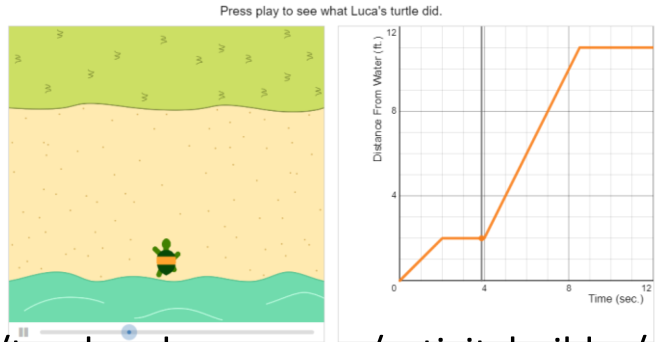
Główne idee:

- Zastosowanie narzędzi rozszerza możliwości człowieka oraz upraszcza i usprawnia wiele zadań (poznawczych)
- Wiele narzędzi cyfrowych jest obecnie dostępnych dla edukacji matematycznej
- Możliwe jest połączenie z embodimentem

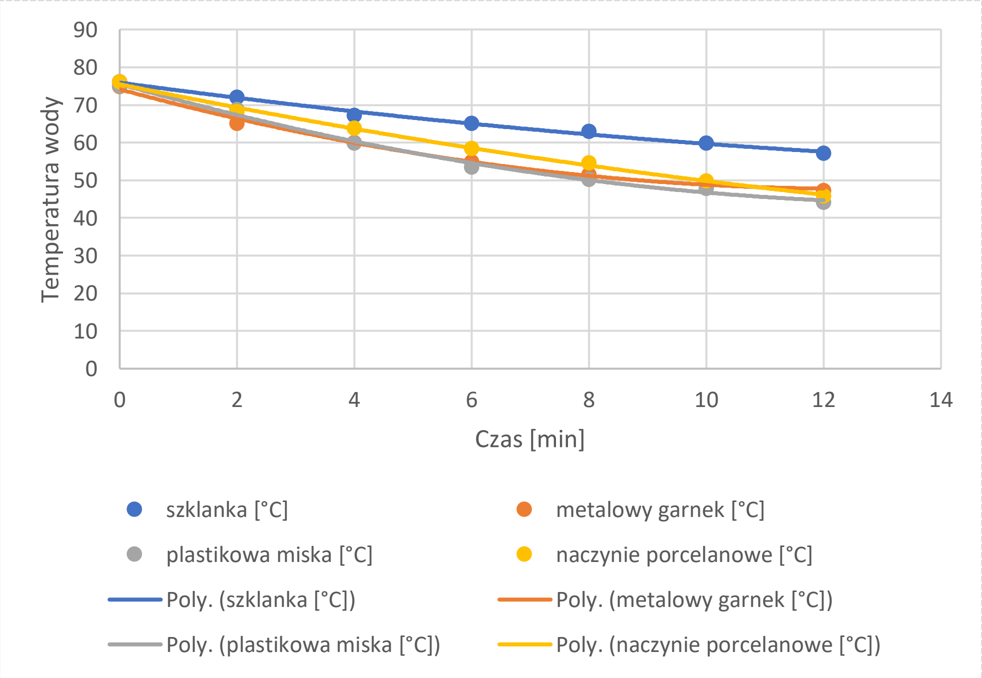








https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/5



czas [min]	0	2	4	6	8	10	12
szklanka [°C]	76,2	72,1	67,2	65,1	63	59,9	57,2
metalowy garnek [°C]	74,9	65,2	60,1	54,9	51,5	49,4	47,3
plastikowa miska [°C]	75	68,8	599	53,5	50,2	47,8	44,2
naczynie porcelanowe [°C]	76,2	68,2	638	58,5	54,6	49,9	43,9

Wprowadzenie do budowy scenariuszy – „learning environments”

Komponenty „learning environments”:

- Przewodnik dla nauczyciela
  - Pierwsza strona
    - Nazwa modułu
    - Wymagany czas
    - Grupa docelowa
    - Opis modułu
    - Koncentracja na zasadach projektowania
    - Aspekty myślenia funkcyjnego
    - Cele nauczania

Teacher Guide

Module:	Temperature	
Teaching Hours:	60 minutes	
Grade Level:	Grade 7 & 8	
Brief Description:	In this module, the arrow diagram representation is introduced and students renew their knowledge about representational changes between table and graph. Students examine the uniqueness of a functional mapping in the arrow diagram and coordinate system representations and switch between the representations. By using different representations of functional relationships, students become aware of their properties and learn to switch between them. In doing so, students distinguish between non-unique and unique mappings. To improve understanding and implementation, temperature data is represented in simplified form.	
Design Principles:	Inquiry	
	Situatedness	
	Digital tools	
	Embodiment	
Functional Thinking:	Input - Output	
	Covariation	
	Correspondence	
	Object	
Learning Goals:	✓ Introduction of the function as a unique mapping. ✓ Recognize functions in different forms of representation. ✓ Check whether a situation/ representation shows a functional relationship or not.	

Wprowadzenie do budowy scenariuszy – „learning environments”

funThink
Enhancing functional thinking from primary to upper secondary school

Komponenty „learning environments”:

Przewodnik dla nauczyciela

- Plan lekcji z dodatkowymi materiałami
  - Zadania z objaśnieniami (przykładowe rozwiązania)
  - W razie potrzeby dodatkowe materiały
  - Notatki dydaktyczne

Activity 1.
The student assignment (identical with the one in the student handout).

Students are engaged in identifying patterns that could be created with their classmates. The teacher is anticipated to select ideas of students' patterns and engage students in constructing them in class. The activity intends to be concluded by identifying repeating and growing patterns.

Useful questions: How is the pattern constructed? Why is it a pattern? (repeats or grows?) What does it change and what does it stay the same each time?

Suggested tools/materials: Students

Estimated duration: 15 minutes

Activity 2.
The student assignment (identical with the one in the student handout).

It is anticipated for students to explore the structure of a growing pattern, that of Human Pyramid, and then to attempt to construct a bigger one (not necessarily the "next" one). Students could be

funThink

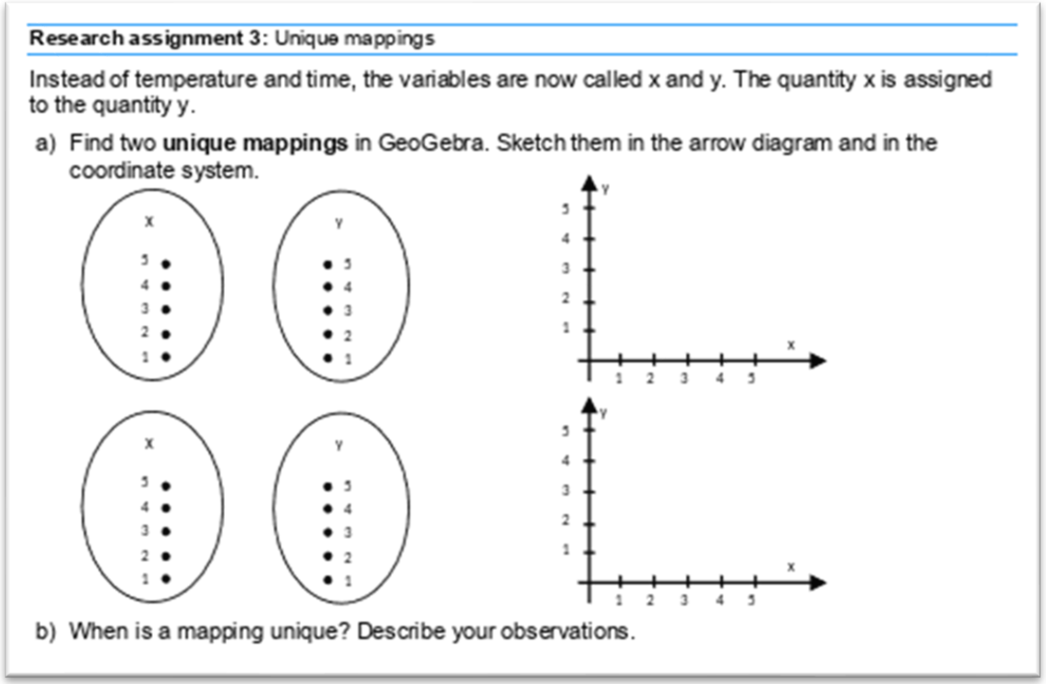
Lesson outline for the "Temperature" module

Section	Teacher	Students	Didactic-methodical comment	Required Material
Introduction (10 min)	Teacher shows a graph of a real temperature trend and asks questions about the change in temperature throughout the day. Other questions: - During what time of year might the temperatures have been measured?	S answer the questions and describe the graph.	Motivation through real-world example Introduction temperature-time graph (correspondence aspect/ input-output aspect)	Slides (2-5)

Wprowadzenie do budowy scenariuszy – „learning environments”

Komponenty „learning environments”:

- Przewodnik dla nauczyciela
- Ulotki – zadania dla uczniów

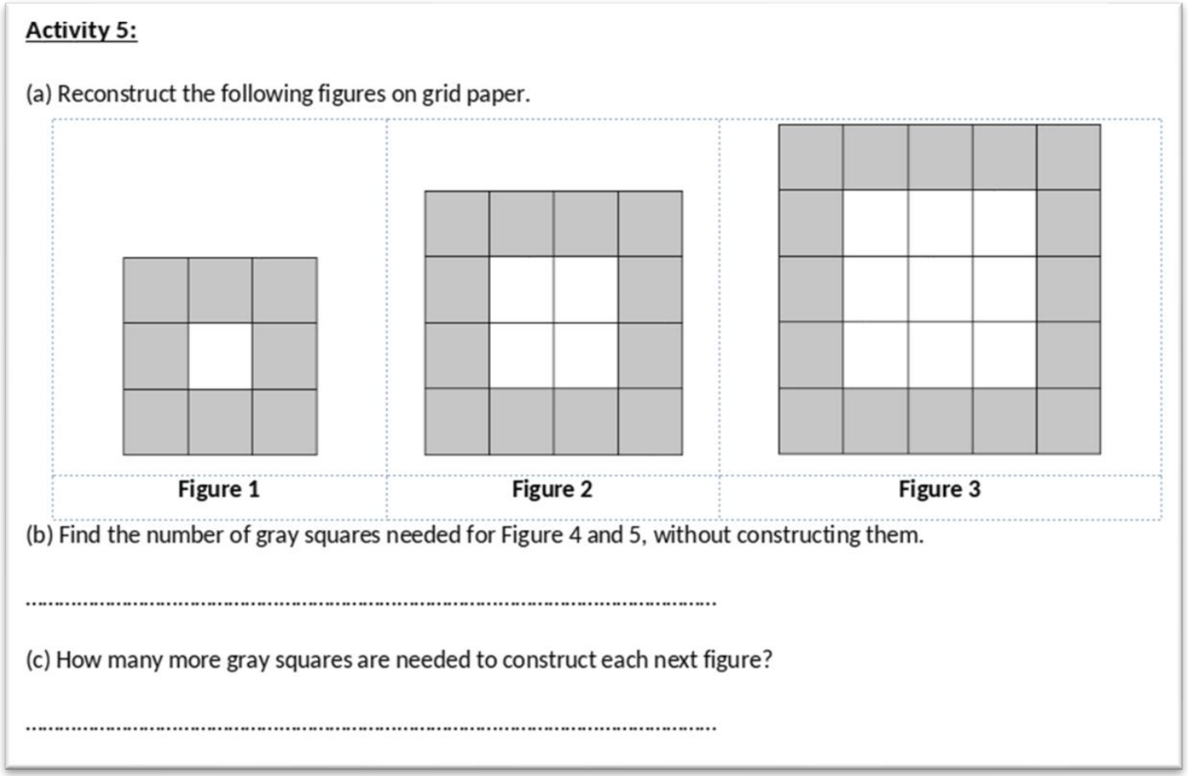


Research assignment 3: Unique mappings

Instead of temperature and time, the variables are now called x and y. The quantity x is assigned to the quantity y.

a) Find two **unique mappings** in GeoGebra. Sketch them in the arrow diagram and in the coordinate system.

b) When is a mapping unique? Describe your observations.



Activity 5:

(a) Reconstruct the following figures on grid paper.

Figure 1 Figure 2 Figure 3

(b) Find the number of gray squares needed for Figure 4 and 5, without constructing them.

....

(c) How many more gray squares are needed to construct each next figure?

....

Przeanalizujmy kilka scenariuszy ☺

Dziękuję za uwagę
i do następnego razu!

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union

Literatura

Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. ZDM, 45(6), 797-810. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6

Dorier, J.-L. & Maass, K. (2020). Inquiry-based mathematics education. In S. Lerman (Ed.), Encyclopedia of Mathematics Education (2nd ed., 384-388). Springer International Publishing.

Drijvers, P. (2019). Embodied instrumentation: combining different views on using digital technology in mathematics education. Utrecht University. Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics, Utrecht, Netherlands. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02436279

Duijzer, C., van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M., Doorman, M. & Leseman, P. (2019). Embodied Learning Environments for Graphing Motion: a Systematic Literature Review. Educational Psychology Review, 31(3), 597-629. https://doi.org/10.1007/s10648-019-09471-7

Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. Mathematics Education library. Springer.

Gravemeijer, K. & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. Journal of Curriculum Studies, 32(6), 777-796.

Hoyles, C. (2018). Transforming the mathematical practices of learners and teachers through digital technology. Research in Mathematics Education, 20(3), 209-228. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1484799

Lakoff, G. & Núñez, R. E. (2000). Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being. Basic Books.

Monaghan, J., Trouche, L. & Borwein, J. M. (2016). Tools and mathematics: Instruments for learning. Mathematics Education library. Springer.

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Plan

- Powrót do szkoły
- Przygotowanie nauczyciela do lekcji
- Porównaj Twój plan lekcji i ten przedstawiony. W jakich aspektach są takie same, a w jakich różne?

Zasady projektowania lekcji

INQUIRY BASED LEARNING
=
NAUCZANIE PRZEZ ODKRYWANIE, PRZEZ DOCIEKANIE

SITUATEDNESS
=
SYTUACYJNOŚĆ

EMBODIMENT
=
UCIELEŚNIENIE

(DIGITAL) TOOLS
=
NARZĘDZIA (CYFORWE)

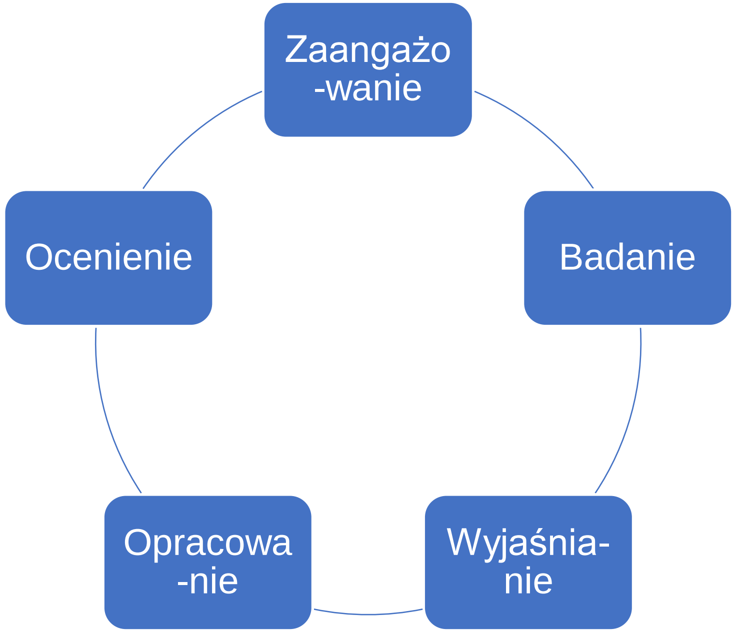
Zasada tworzenia: badanie (inquiry based learning)

Wsparcie:

- Ciekawość i krytyczne myślenie
- Konstruowanie i stosowanie nowej wiedzy
- Współpraca i komunikacja

Cykl badawczy 5E

Engagement, Exploring, Explaining, Elaborating, Evaluating



Uczniowie formułują pytania i odpowiadają na nie.

Więcej informacji można znaleźć np.,
Dorier & Maass, 2020; Artigue & Blomhøj, 2013

Zasada tworzenia:
nauczanie przez badanie (inquiry based learning)

- Dla jakich uczniów eksploracja jest odpowiednią metodą nauczania?
- Co musi mieć / być nauczyciel, który chce uczyć w sposób odkrywczy?
- Jakie są zalety / wady eksploracji?

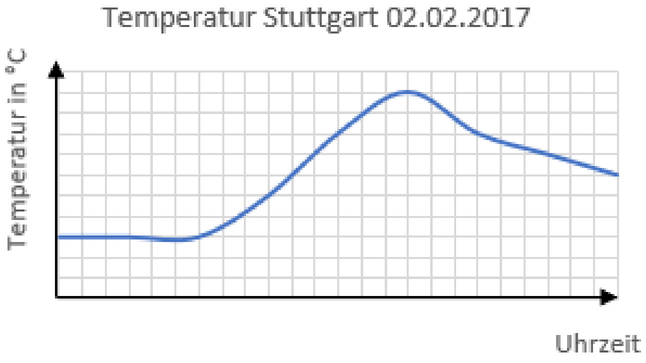
Zasada tworzenia: sytuacyjność

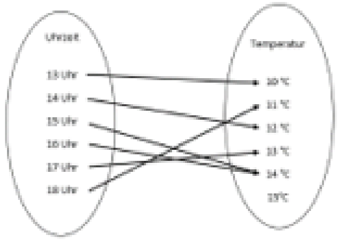
Podstawowe pojęcie funkcji:

Stwierdzanie, postulowanie, tworzenie, odtwarzanie zależności (lub związków) pomiędzy zmiennymi występującymi w świecie fizycznym, społecznym, psychicznym, czyli w tych światach i pomiędzy nimi.

(Freudenthal, 1983, s. 494)

Für ein Schulprojekt sammelst du Temperaturdaten und wertest diese aus. Deine Ergebnisse stellst du unterschiedlich dar, als Pfeildiagramm, als Tabelle und als Temperatur-Zeit-Graphen.
Hier siehst du einen Temperatur-Zeit Graphen, er gibt die Temperatur in Abhängigkeit von der Uhrzeit an.





Uhrzeit	0	1	2	3	4	5	6	7
Temperatur in °C	4	4	3	3	3	2	2	4

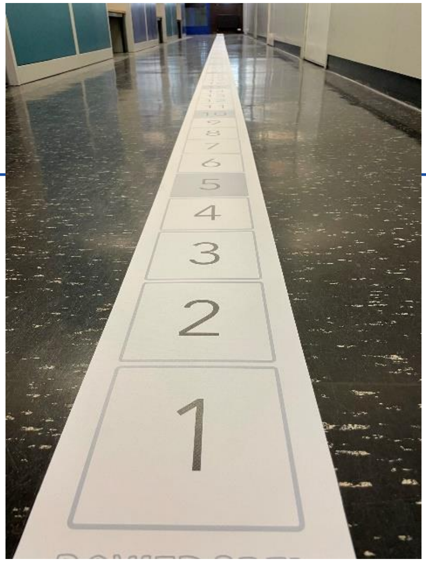
Untersuche den Zusammenhang zwischen Temperatur und Uhrzeit in unterschiedlichen Darstellungen.

Więcej informacji można znaleźć np.. v Gravemeijer & Terwel, 2000.

Zasada tworzenia: sytuacyjność

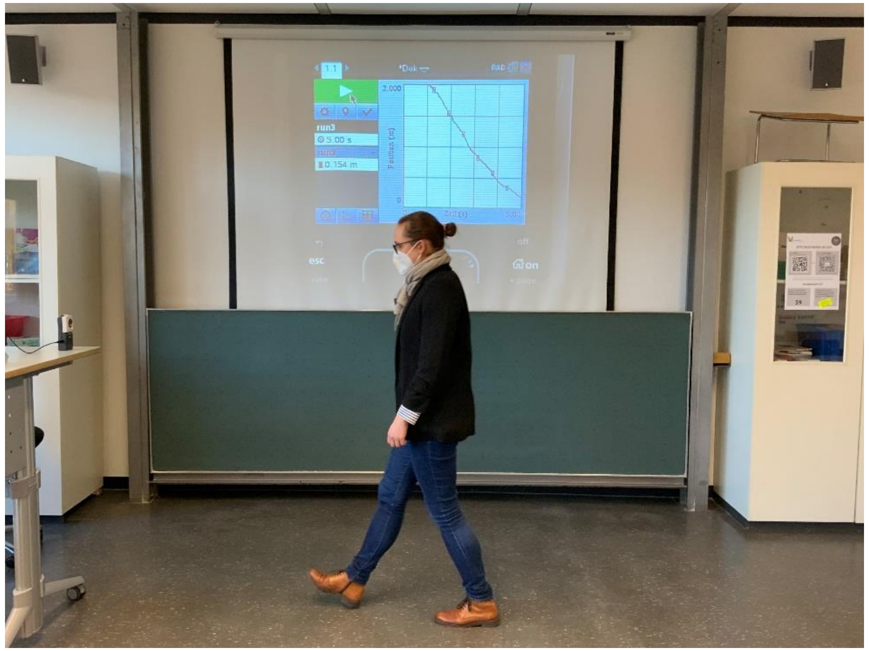
- Jaka jest rola „sytuacyjności” i zastosowania w nauczaniu matematyki?
- Na jakim etapie procesu poznawczego wykorzystałbyś realne sytuacje?

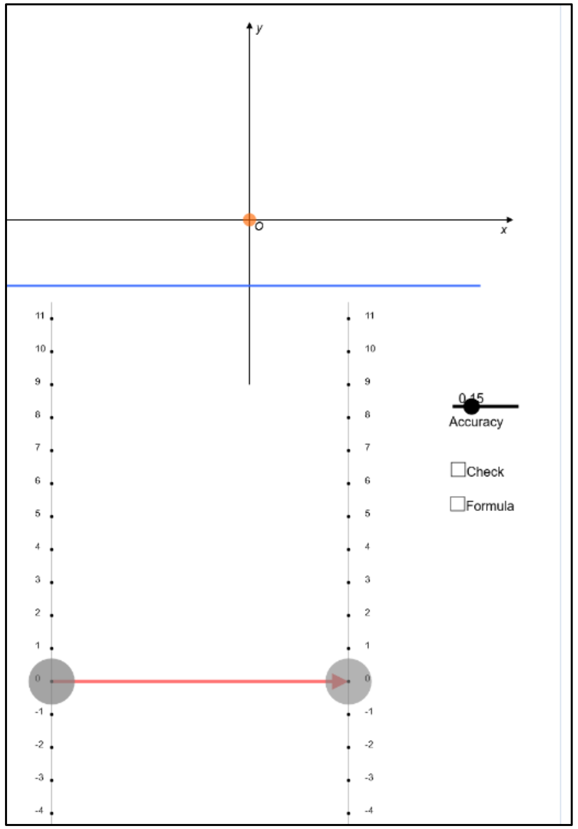
Zasada tworzenia: embodiment



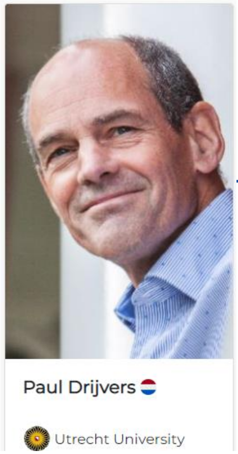
Główne idee:

- Wszystko, co (świadomie) napotykamy i postrzegamy staje się częścią wiedzy
- Doświadczenia ucieleśnienia są niezbędne dla poznania
- Rozumienie matematyki może być oparte na ucieleśnionych doświadczeniach/ruchach





Więcej informacji na ten temat można znaleźć np., Duijzer et al., 2019; Lakoff & Nunez, 2000



- Z perspektywy poznania ciało i umysł nie mogą być oddzielone, a dualistyczny pogląd na poznanie jest niewłaściwy.
- Istnieją różne podejścia do interpretacji „ucieleśnienia”.
- Opierając się na Konceptualnej Teorii Metafor w językoznawstwie kognitywnym (Lakoff & Johnson, 1980), Lakoff i Núñez (2002) uważają, że poznanie pojawia się poprzez doświadczenia cielesne w interakcji ze środowiskiem, aby wykonać zadanie lub osiągnąć określony cel.
- Niektóre badania prezentują podobny pogląd na temat ucieleśnienia dotyczący projektu ucieleśnionego w uczeniu funkcji (np. Font i in., 2010; Oehrtman i in., 2019; Paz i Leron, 2009).
- Z perspektywy percepcyjnej Barsalou wyjaśnia „ucieleśnienie” poprzez doświadczenia ugruntowujące, co jest również zalecane przez Schwartz (1999) i Abrahamsona i in. (2016).
- Niektórzy badacze mają radykalny pogląd na ucieleśnione poznanie. Radykalna ucieleśniona kognitywistyka w nauczaniu odrzuca reprezentacje umysłowe i obliczenia umysłowe jako narzędzia wyjaśniające (Antoniadis i Chemero, 2020).
- W większości odmian „ucieleśnionej” kognitywistyki ruchy ciała i zasoby środowiskowe są traktowane jako uzupełnienie, a nawet transformacja mentalnych reprezentacji i obliczeń, które, jak się zakłada, konstytuują poznanie (np. Clark, 1997).

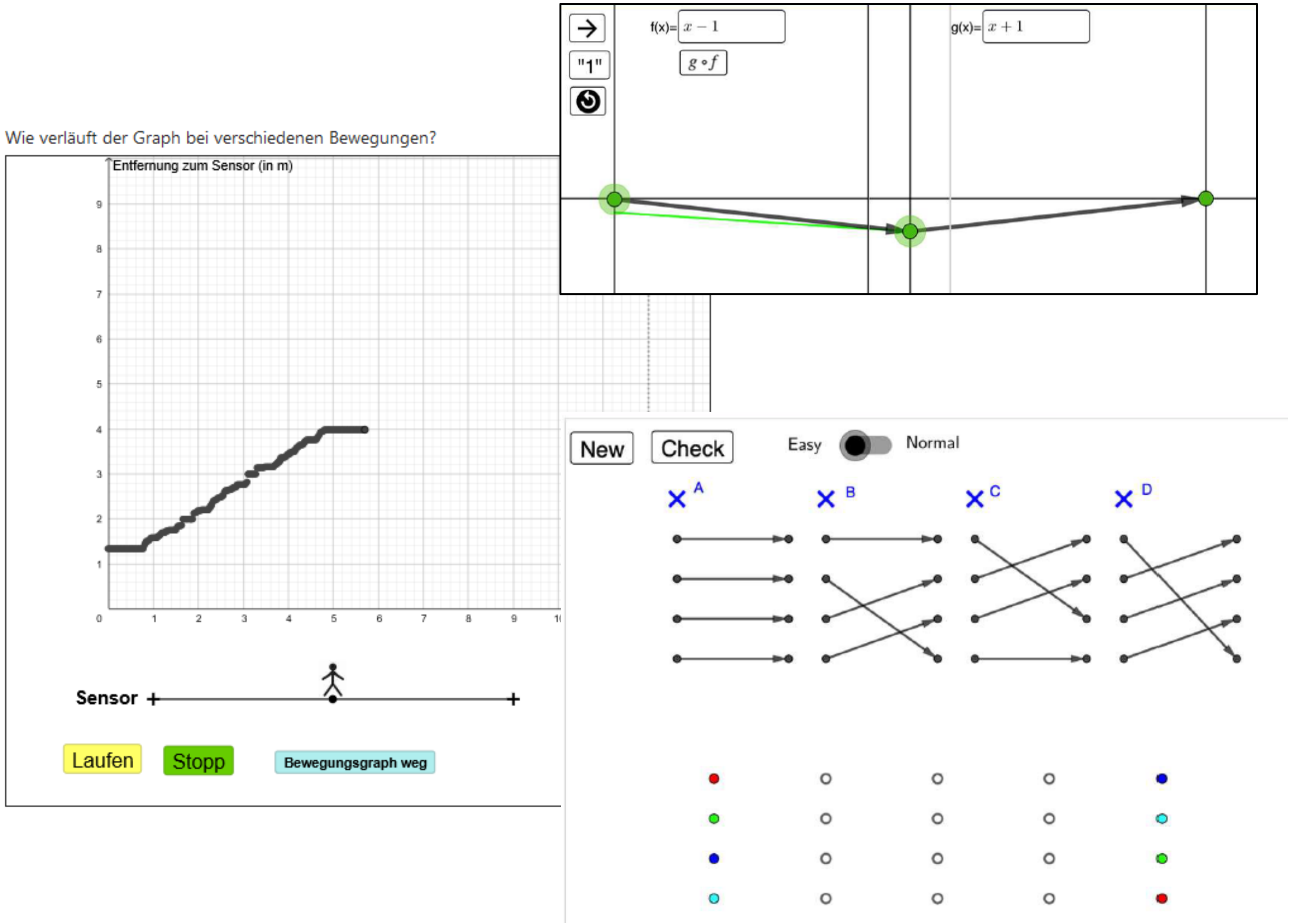
Zasada tworzenia: embodiment

- Wyjaśnij wcielenie własnymi słowami.
- Czy możesz pomyśleć o jakichkolwiek kontekstach (poza klasą), w których oczywiste jest, że myślimy poprzez ciało, poprzez ruch?

Zasada tworzenia: narzędzia (cyfrowe)

Główne idee:

- Zastosowanie narzędzi rozszerza możliwości człowieka oraz upraszcza i usprawnia wiele zadań (poznawczych)
- Wiele narzędzi cyfrowych jest obecnie dostępnych dla edukacji matematycznej
- Możliwe jest połączenie z wcieleniem



Więcej informacji można znaleźć np.,
Drijvers, 2019; Hoyles, 2018; Monaghan et al., 2016

Zasada tworzenia: narzędzia (cyfrowe)

- Jaka jest rola narzędzi (cyfrowych) w nauczaniu matematyki?
- Na jakim etapie procesu poznawczego wykorzystałbyś technologie cyfrowe?
- Jakie wykorzystanie technologii cyfrowych w nauczaniu uważa Pan/Pani za (nie)wysokiej jakości?

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Funkcja i myślenie funkcyjne w programach nauczania

Veronika Hubeňáková

Ingrid Semanišinová, Ute Sproesser, Kerstin Frey, Miroslawa Sajka

Verzia 30.09.2022

Co to znaczy rozwijać myślenie funkcyjne?

Co to znaczy rozwijać myślenie funkcyjne?

- **Wzbogacenie idei funkcji pod względem różnych aspektów**
- **Rozszerzenie umiejętności uczniów w zakresie korzystania z reprezentacji i poruszania się między nimi.**
- **Identyfikacja funkcji w różnych kontekstach**
  - w obrębie matematyki,
  - poza matematyką.

Zadanie

- Każdej grupie przydzielono typ szkoły, w kolejnych zadaniach skup się na tym typie.

A. Podziel 12 punktów pomiędzy różne aspekty w zależności od tego, jak ważne są one w danym typie szkoły/klasy.

B. Dla każdej reprezentacji wskaż, czy jest ona używana w danym typie szkoły/klasy (P - używana, I - używana "wstępna", "przygotowawcza", "propedeutyczna", X - nieużywana).

C. W odpowiednim miejscu wyjaśnij istotne informacje.
   Np. jak przygotowawcza jest dana reprezentacja, dlaczego nie jest używana, jakie inne reprezentacje są obecne.

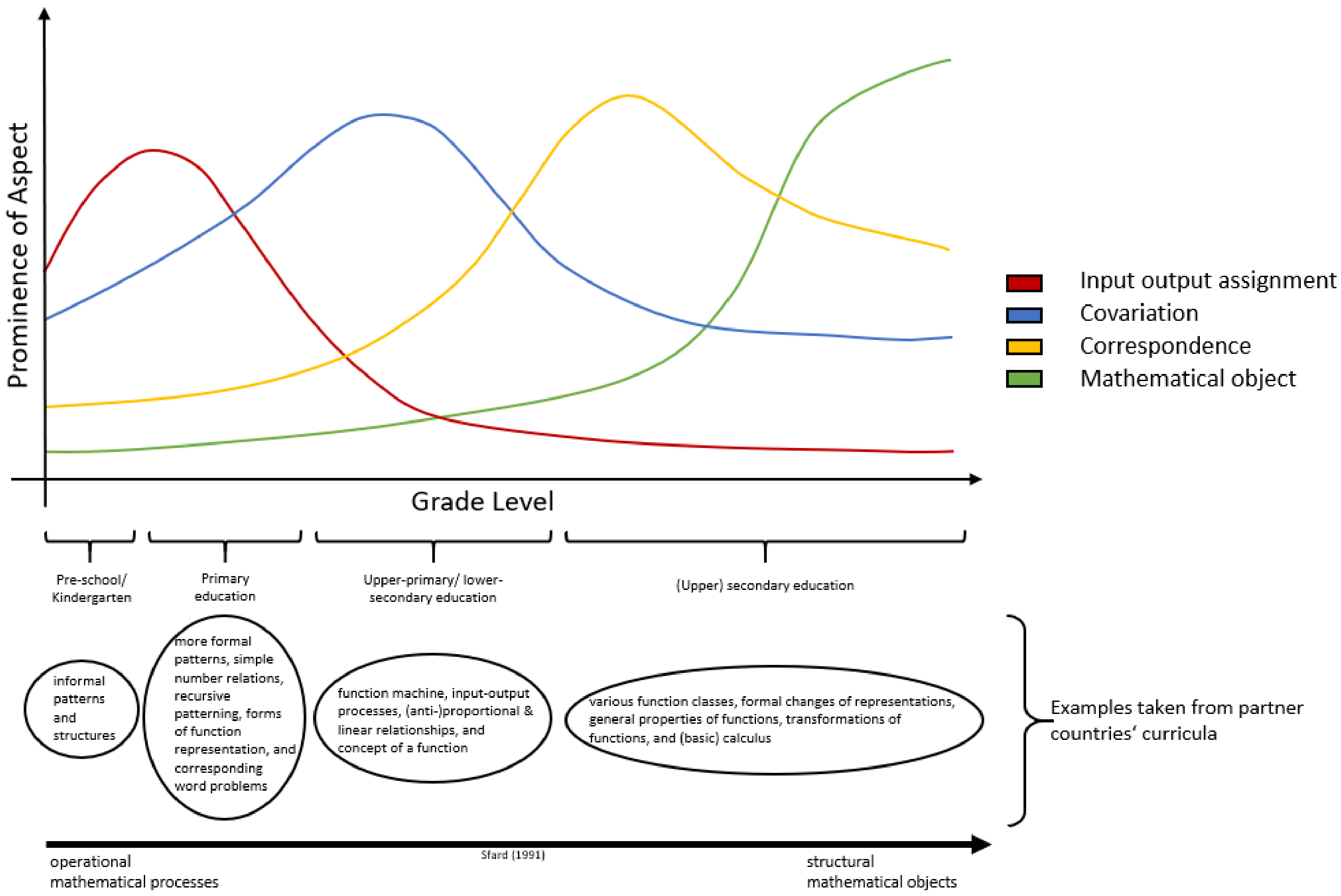
D. Wymień konkretne tematy matematyczne, w których można rozwijać myślenie funkcyjne. Wyjaśnij, w jaki sposób:
   A. W tematach związanych bezpośrednio z pojęciem funkcji
   B. Poza tematyką związanych z funkcjami

E. Wymień kilka zastosowań matematyki w praktyce, inny przedmiot, które mają zastosowanie w programie nauczania danego typu szkoły.

Aspekty funkcji i myślenia funkcyjnego

	Klasy 0-3 szkoły podstawowej	Klasy 6-8 szkoły podstawowej	Szkoła średnia – klasa 1 (definicja)	Szkoła średnia – klasy 2-5
Wejście-wyjście				
Współzmienność				
Przyporządko-wanie				
Obiekt				

Rozwijanie aspektów



Rozwijanie reprezentacji

	Klasy 0-3 szkoły podstawowej	Klasy 6-8 szkoły podstawowej	Szkoła średnia – klasa 1 (definicja)	Szkoła średnia – klasy 2-5
Wykres				
Przepis - wzór				
Tabelka				
Opis słowny				
Inne				

Rozwijanie reprezentacji

	Klasy 0-3 szkoły podstawowej	Klasy 6-8 szkoły podstawowej	Szkoła średnia – klasa 1 (definicja)	Szkoła średnia – klasy 2-5	
Wykres	I	P	P	P	
Przepis - wzór	I	I - P	P	P	
Tabelka	P	P	P	P	
Opis słowny	I	I - P	P	P	
Inne	Łańcuch, nomogram, diagramy Venna, ...				

Rozwijanie reprezentacji - wykres

- **Co jest potrzebne, aby móc prawidłowo korzystać z reprezentacji graficznej?**
- **Rozwijanie pojęcia liczby**
  - $\mathbb{N} - \mathbb{Q}^{+} - \mathbb{Z} - \mathbb{Q} - \mathbb{R} - \mathbb{C}$
  - Kiedy oś liczbowa jest "pełna" i wykres może być ciągły? - potrzebujemy liczb rzeczywistych
- **Układ współrzędnych**
  - propedeutyka (pisanie w tabeli i na szachownicy)
    - **problem z kolejnością (A1 i 1A identyfikują to samo pole)**
    - **problem z kwadrantem (tabela jest jak czwarty kwadrant, wykres początkowo nadaje priorytet pierwszemu kwadrantowi)**
    - **problem z kolejnością (podczas poruszania się po tabeli części mają priorytet według wiersza, a nie kolumny - odwrotnie niż w przypadku współrzędnych)**

Rozwijanie reprezentacji – przepis, wzór

- **Co trzeba wiedzieć, aby prawidłowo korzystać ze wzoru?**
- **Różne rozumienie litery w matematyce**
  - Oznaczenie ...
  - Jedna konkretna liczba - niewiadoma - np. w równaniu
  - Kilka różnych liczb - np. w nierówności
  - Zmienna - w funkcji...

Rodzaje funkcji w programie nauczania

Klasy 0-3 szkoły podstawowej	Klasy 6-8 szkoły podstawowej	Szkoła średnia – klasa 1 (definicja)	Szkoła średnia – klasy 2-5

Rodzaje funkcji w programie nauczania

- **Jakie właściwości funkcji możemy przyjąć dla jakich funkcji?**

Funkcje w innych obszarach programu nauczania

- **Wzory geometryczne (obwody, zawartość, ...) jako funkcje**
- **Tworzenie tabel**
  - Dostrzeganie różnic i podobieństw między tabelami
- **Stosunek i proporcjonalność bezpośrednia**
- **Ciągi – jako szczególnych rodzaj funkcji**
- **Przekształcenia geometryczne**
  - Identyczność, podobieństwo, jednokładność, powinowactwo prostokątne, translacja o wektor, obrót
  - Wykorzystanie własności funkcji do uzasadnienia modyfikacji
- **Równania analityczne niektórych figur geometrycznych**
  - Funkcja kwadratowa - parabola, funkcja liniowa - prosta, ...
- **Równania i nierówności**
  - Graficzne metody rozwiązywania równań i nierówności
- **Modele statystyczne**
  - Funkcja liniowa jako linia regresji

Funkcje w innych przedmiotach - przykłady zastosowań

Klasy 0-3 szkoły podstawowej	Klasy 6-8 szkoły podstawowej	Szkoła średnia – klasa 1 (definicja)	Szkoła średnia – klasy 2-5

Co-funded by the Erasmus+ Programme of the European Union

The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Sytuacyjność i modelowanie

Veronika Hubeňáková

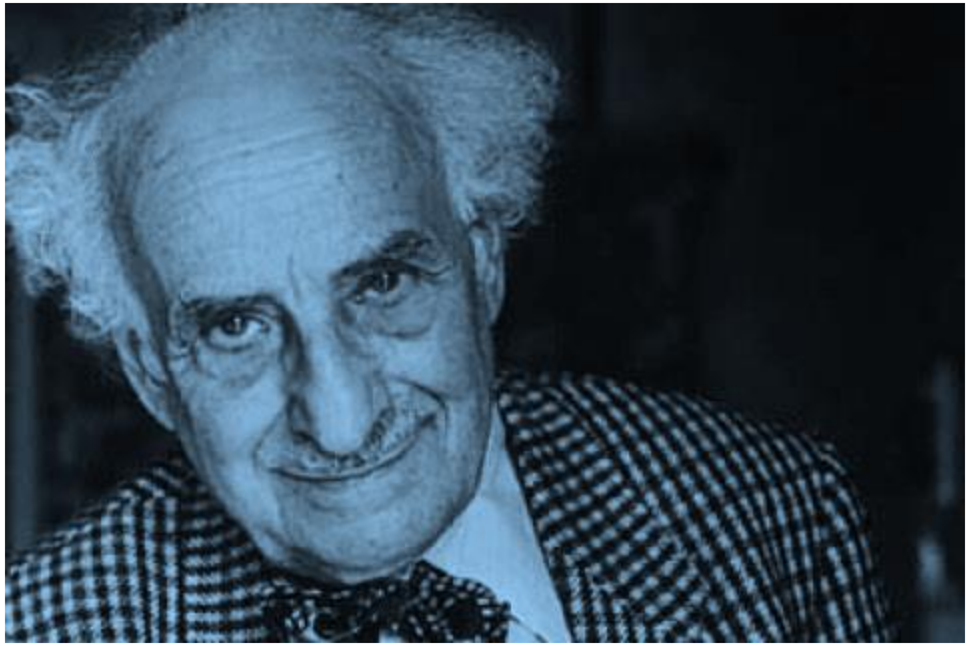
Ingrid Semanišinová, Ute Sproesser, Kerstin Frey, Mirosława Sajka

Verzia 30.09.2022

Realistyczne nauczanie matematyki

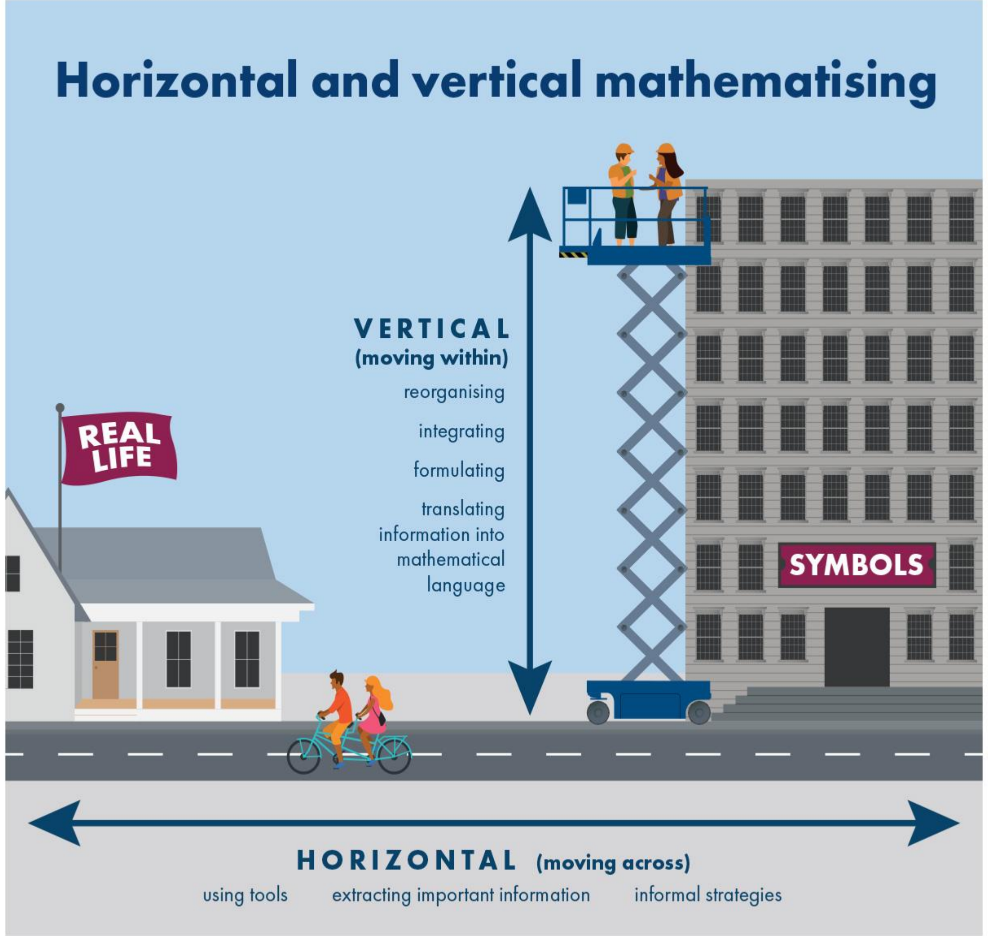
- Ludzie nie powinni uczyć się matematyki jako zamkniętego systemu. Muszą raczej uczyć się matematyki jako aktywności. Jako proces ***matematyzowania rzeczywistości*** i, jeśli to możliwe, nawet ***matematyzowania matematyki***.

(Freudenthal, 1968, s.7)



https://www.uu.nl/en/research/freudenthal-institute/hans-freudenthal

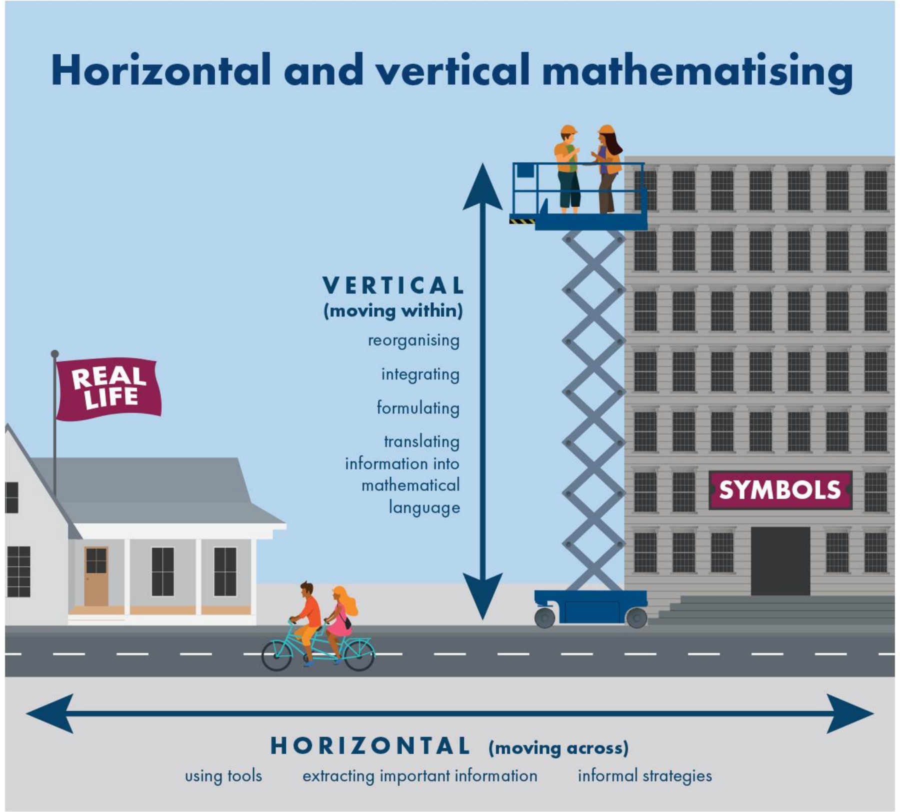
Matematyzacja



Adapted from Tressler (1978), Freudenthal (1991) & Barnes (2005)

- **Matematyzacja horyzontalna**
  - "Tłumaczenie" **rzeczywistego kontekstu** na model matematyczny
- **Matematyzacja wertykalna**
  - „Tłumaczenie" **modelu matematycznego** na język matematyczny - abstrakcyjne spojrzenie na model
  - zmiana reprezentacji, metody rozwiązania, reorganizacja informacji, ...

Matematyzacja



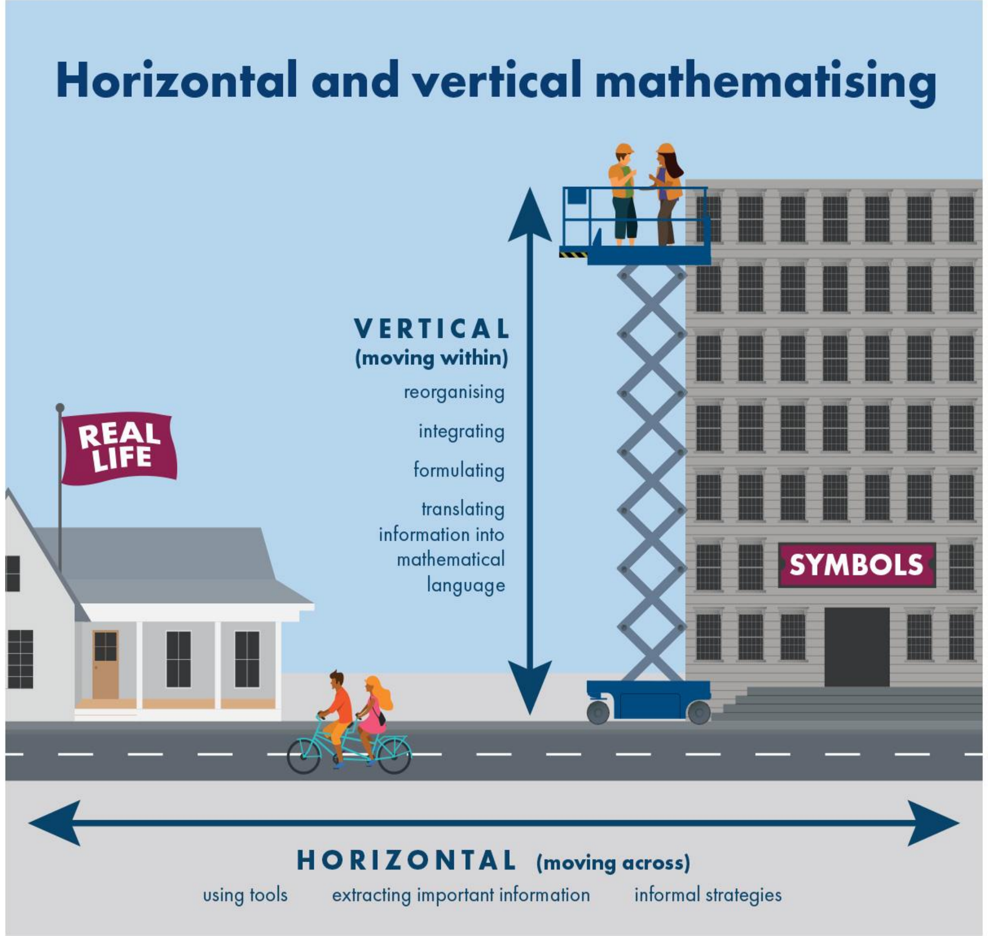
Adapted from Tressler (1978), Freudenthal (1991) & Barnes (2005)

Dwie firmy taksówkowe mają następujące zasady płatności:

- W firmie TAXI PAX opłata stała za wynajęcie taksówki wynosi 5 euro, a dodatkowo za każdy rozpoczęty kilometr należy zapłacić 0,30 euro.
- W firmie TAXI MAX opłata stała za wynajęcie taksówki wynosi 3 euro, a dodatkowo za każdy rozpoczęty kilometr należy zapłacić 0,50 euro.

Przy jakiej długości trasy opłata za przejazd będzie taka sama?

Matematyzacja



Adapted from Tressler (1978), Freudenthal (1991) & Barnes (2005)

TAXIPAX: 5€ za jazdu
0,3€ za km

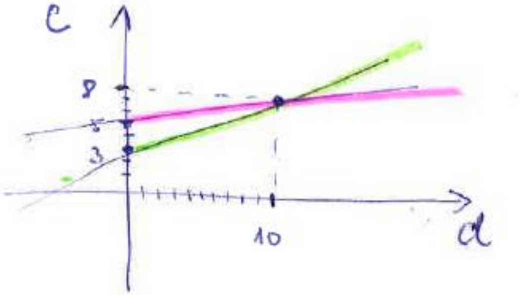
$C = 5 + 0{,}3d$

C - cena ; d - dráha

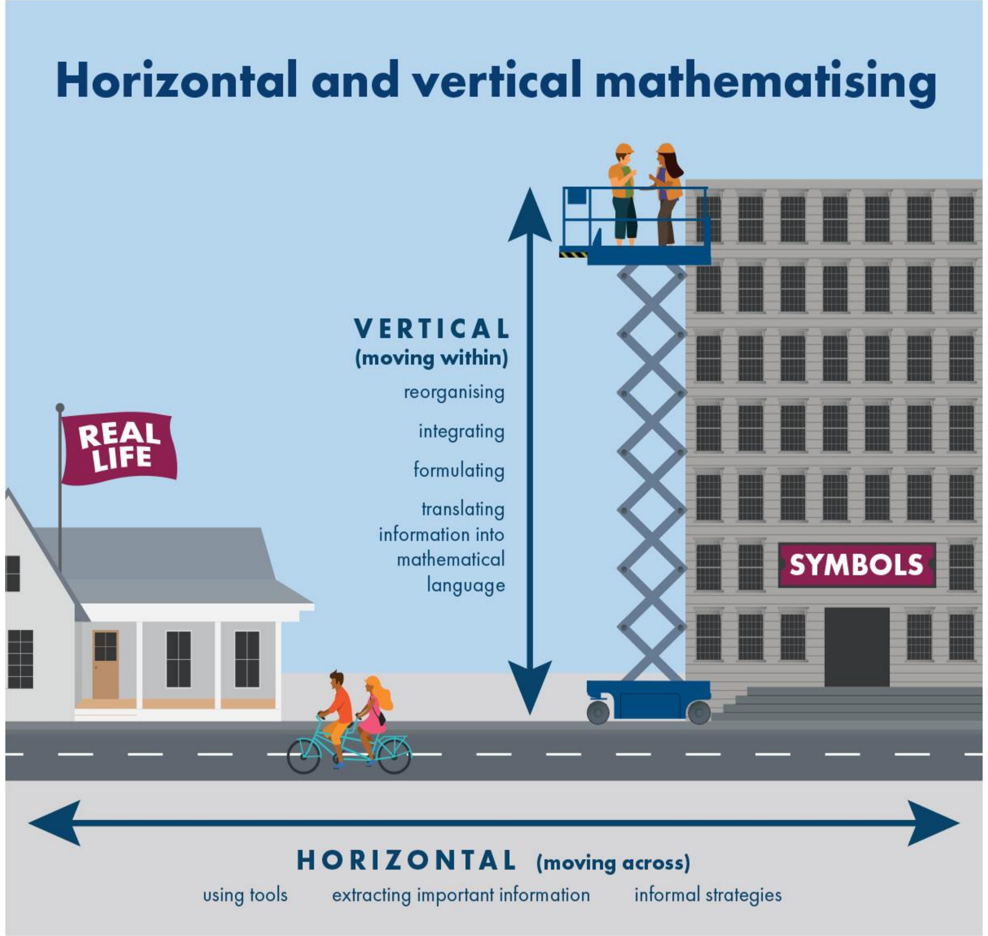
TAXI MAX: 3€ za jazdu
0,5€ za km

$C = 3 + 0{,}5d$

$$c = 5 + 0{,}3d$$
$$c = 3 + 0{,}5d$$
$$0 = 2 - 0{,}2d$$
$$d = 10$$



Matematyzacja



Adapted from Tressler (1978), Freudenthal (1991) & Barnes (2005)

TAXIPAX: 5€ za jazdu
0,3€ za km

$C = 5 + 0{,}3d$

C - cena ; d - dráha

TAXI MAX: 3€ za jazdu
0,5€ za km

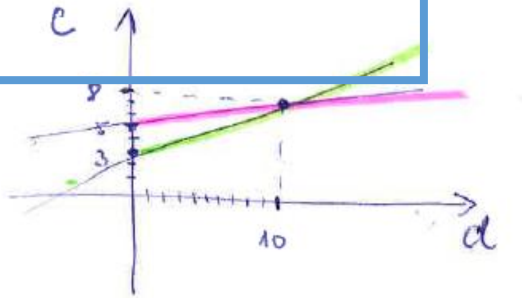
$C = 3 + 0{,}5d$

$c = 5 + 0{,}3d$

$c = 3 + 0{,}5d$ -

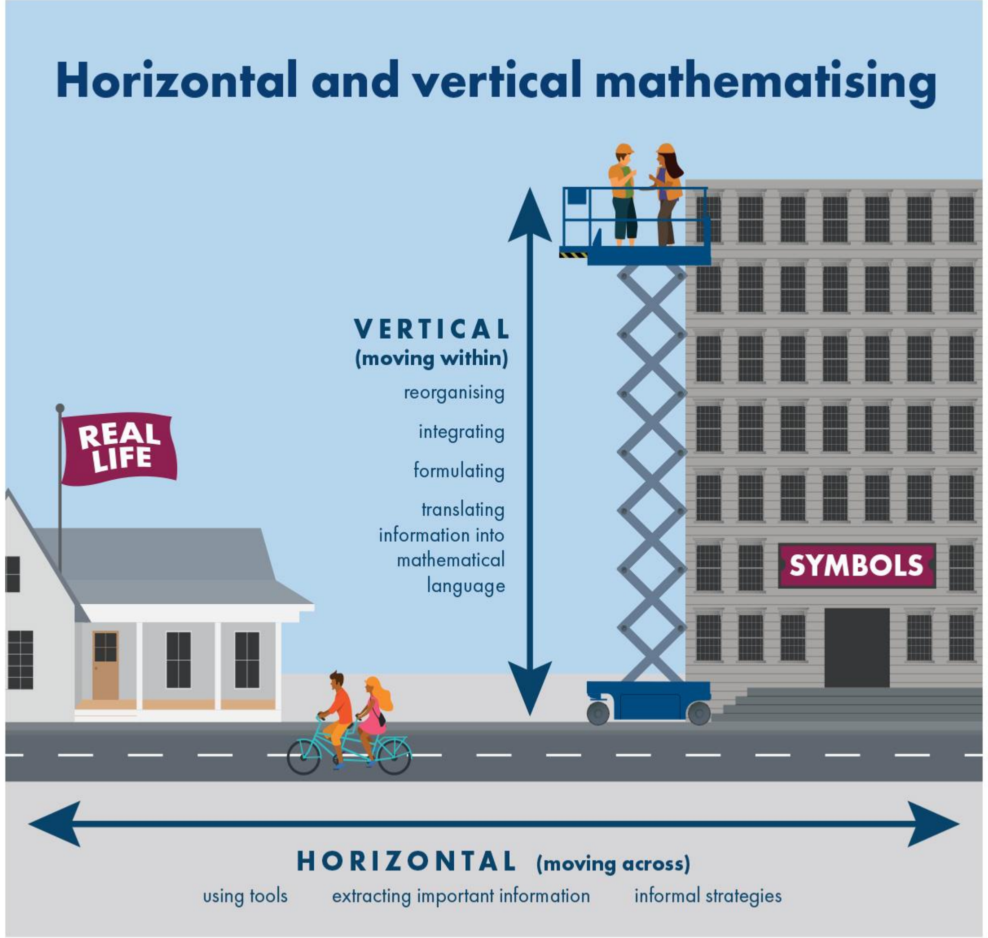
$0 = 2 - 0{,}2d$

$d = 10$

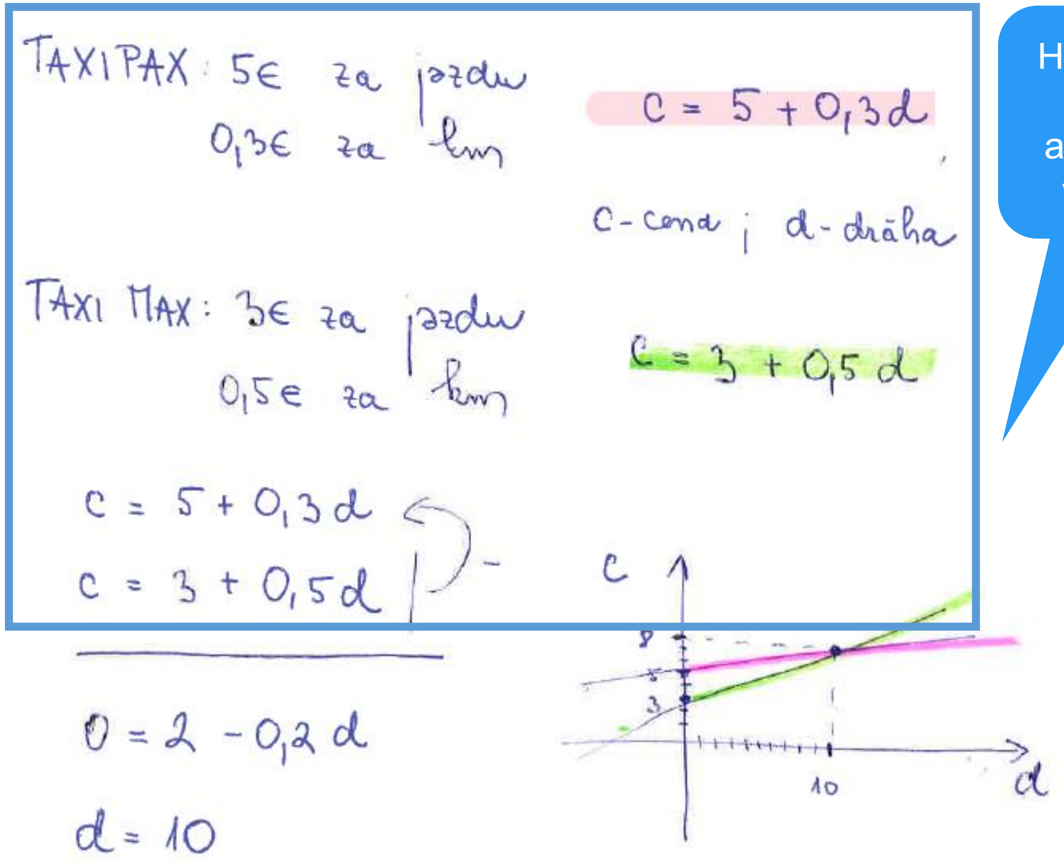


Horyzontalnie: Jakiej aktywności to wymagało?

Matematyzacja



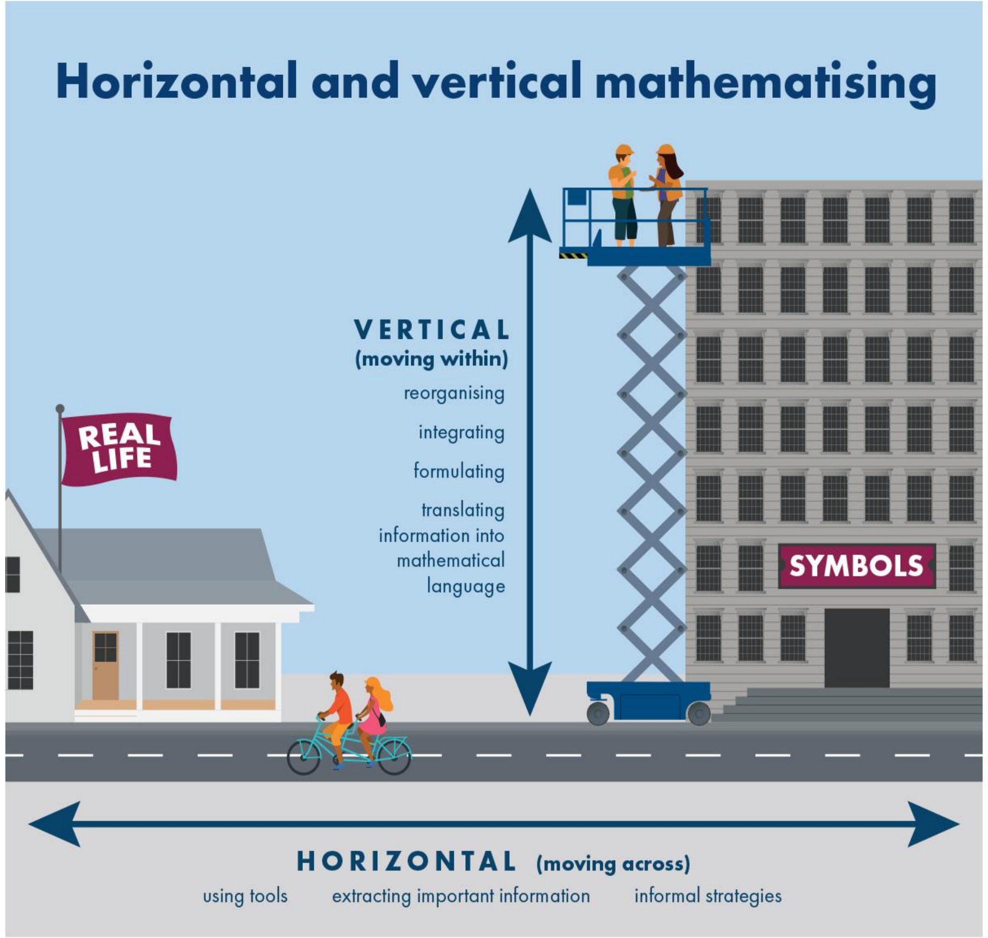
Adapted from Tressler (1978), Freudenthal (1991) & Barnes (2005)



Horyzontalnie: Jakiej aktywności to wymagało?

- Należy pamiętać, że sytuację można zmatematyzować.
- Zidentyfikuj ważne informacje
  "Coś" się zmienia - co się zmienia?, „Coś" zależy od tej zmiany - od czego to zależy?
- Zrozumienie, w jakim są związku
- Co łączy obie taryfy usług taksówkarskich - dla obu taryf cena zachowuje się liniowo.

Matematyzacja



Adapted from Tressler (1978), Freudenthal (1991) & Barnes (2005)

TAXIPAX: 5€ za jazdu
0,3€ za km

$C = 5 + 0{,}3d$

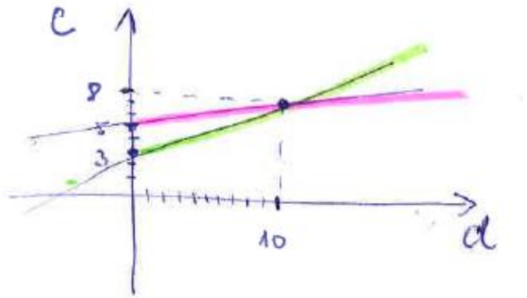
C - cena ; d - dráha

TAXI MAX: 3€ za jazdu
0,5€ za km

$C = 3 + 0{,}5d$

$c = 5 + 0{,}3d$
$c = 3 + 0{,}5d$ −

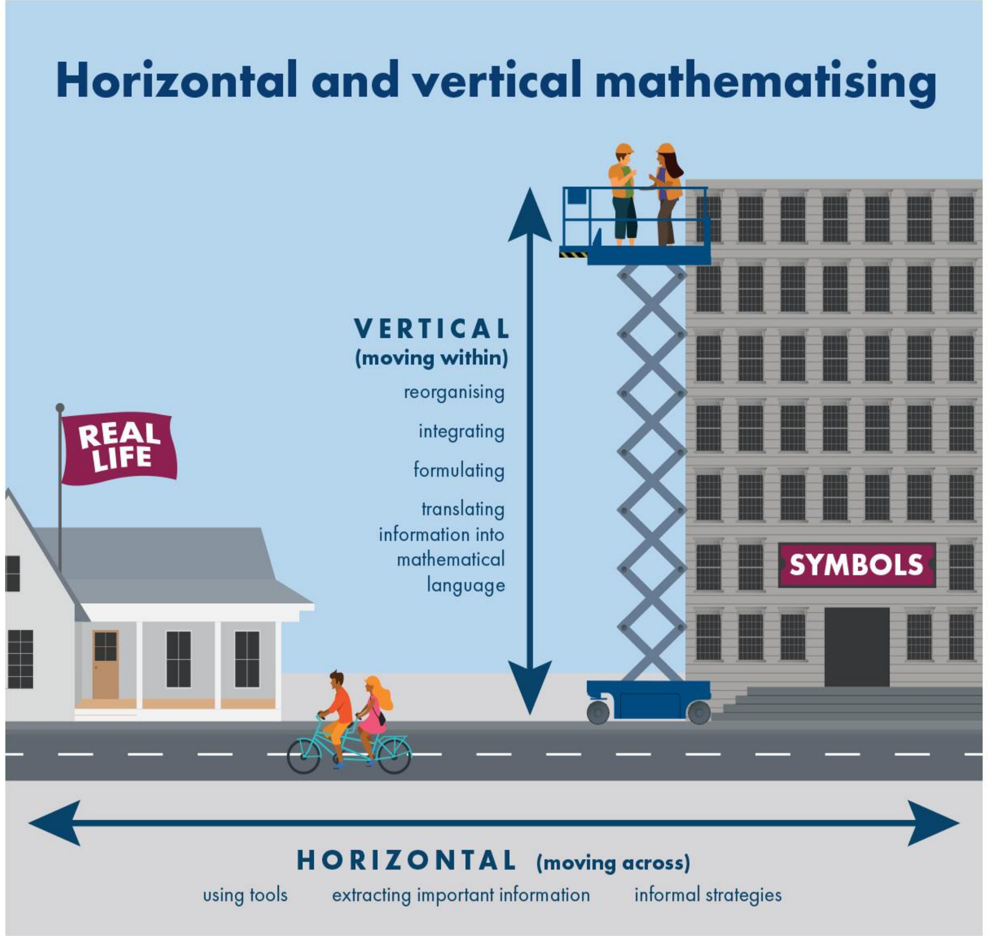
$0 = 2 - 0{,}2d$
$d = 10$



Wertykalnie: Jakiej aktywności to wymagało?

Matematyzacja

funThink
Enhancing functional thinking from primary to upper secondary school



Adapted from Tressler (1978), Freudenthal (1991) & Barnes (2005)

TAXIPAX: 5€ za jazdu
0,3€ za km

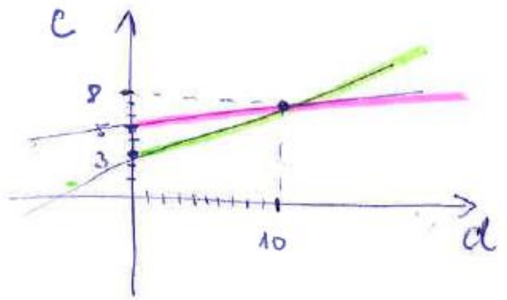
$c = 5 + 0{,}3d$

c - cena ; d - dráha

TAXI MAX: 3€ za jazdu
0,5€ za km

$c = 3 + 0{,}5d$

$$c = 5 + 0{,}3d$$
$$c = 3 + 0{,}5d$$
$$0 = 2 - 0{,}2d$$
$$d = 10$$



Wertykalnie: Jakiej aktywności to wymagało?

- Stosowanie skutecznej strategii rozwiązywania układów równań liniowych
- Zmiana reprezentacji - użycie symboli
- Tworzenie powiązań między geometrią a funkcjami ("proste nie będą się przecinać więcej niż raz")

Co to jest...

REALNY KONTEKST?

FunThink aktywność

1. Wybierz 3 przykłady z podręczników, które Twoim zdaniem wymagają matematyzacji.
2. Wypisz te przykłady na 3 osobnych kartach pracy
3. Zapisz swoje odpowiedzi na poniższe pytania na osobnej kartce.
4. Wymień się z osobą z pary swoimi propozycjami zadań.
5. Odpowiedz na pytania do zadań swojego współpracownika.
6. Porównajcie odpowiedzi. Przedyskutujcie różnice. Opowiecie o nich na forum grupy.

PYTANIA:

- Czy matematyzacja była obecna?
- Jeśli tak, to która? W jaki sposób?
- Czy obecny był rzeczywisty kontekst? Jeśli tak, to jaki?

Refleksja nad aktywnością

W parach stwórzcie "plakat", aby zaprezentować swoje odpowiedzi dla ustalonych trzech zadań i ich rozwiązań na pytania:

- Czy matematyzacja była obecna?
- Jeśli tak, to która? W jaki sposób?
- Czy obecny był rzeczywisty kontekst? Jeśli tak, to który?

Aký je to reálny kontext?

Przyznaj każdemu z nich 5 głosów "+" (możesz też przyznać wszystkie jednej charakterystyce) i 2 głosy "-", tak aby odzwierciedlały one twoje postrzeganie rzeczywistego kontekstu.

Ważne jest, aby było to zastosowanie matematyki w innej dziedzinie.	Ważne jest, aby był to naukowo (np. fizycznie) poprawny kontekst.	Ważne jest, aby kontekst miał znaczenie dla uczniów.	Ważne jest, aby odzwierciedlał on doświadczenia i zainteresowania uczniów.	Możliwe, że w ogóle nie odnosi się do rzeczywistej sytuacji.	Jeśli jest to rzeczywista sytuacja, ważne jest, aby nie była sztuczna.	Ważne jest, aby móc to dokładnie opisać matematycznie.