

This material is provided by the [FunThink Team](#).
Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under a Creative Commons License ([CC BY-SA 4.0](#)). Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Poznanie učiva

Názov kurzu

Meno lektora

Číslo sekcie:

Intelektuálny výstup projektu FunThink (Erasmus+)

Úloha 1: Výtah

Hotel má niekoľko poschodí, prízemie s číslom nula a pod prízemím je niekoľko parkovacích poschodí. Nasledujúca tabuľka zobrazuje, na ktoré poschodie sa dostanete po niekoľkých sekundách. Vy ste sa ubytovali na 14. poschodí a chystáte sa výtahom zísť dole na parkovisko k svojmu autu.

Počet sekúnd	Počet poschodí
0	14
2	10
4	6
6	2
7	?

- A. Na ktorom poschodí bude výtah po siedmich sekundách? Vysvetlite svoju odpoveď.
- B. Akou rýchlosťou klesá výtah? Vysvetlite svoju odpoveď.

Úloha 1: Výtah

Počet sekúnd	Počet poschodí
0	14
2	10
4	6
6	2
7	?

} 4 = DP
} 4 = DP
} 4 = DP

(a) Na ktorom poschodí bude výtah po siedmich sekundách? Vysvetlite svoju odpoveď.

na prízemí prejde každé 2 sekundy klesne o 4 poschodia, o 1 s klesne o 2 poschodia

(a) Na ktorom poschodí bude výtah po siedmich sekundách? Vysvetlite svoju odpoveď.

za 2 sekundy príde 4 poschodie ... za 1 sekundu 2 poschodie
teda 7 s + sekunda ... $7 \cdot 2 = 14$
za 7 sekunda prejde výtah 14 poschodí
teda bude na prízemí

(b) Akou rýchlosťou klesá výtah? Vysvetlite svoju odpoveď.

Výtah klesá rýchlosťou 2 poschodia na sekundu.
Rýchlosť vypočítame ako $v = \frac{s}{t} = \frac{\text{dĺžka (poschodia)}}{\text{čas}}$
Z kabútky jasne vyplýva, že výtah klesne za 2 sekundy o 4 poschodia, teda ak chceme rýchlosť 4 poschodia / 2 sek.
= 2 poschodia / na sekundu.

$$s = vt$$

počítame rýchlosť pre 10. poschodie:

naše s = 10 poschodí

naše v = neznáma

naše t = 2 sekundy (výtah sa po 2s dostane na 10 poschodie)

$$\begin{aligned} \text{doplníme do vzorca: } 4 &= v \cdot 2 & \longrightarrow & 1 = v \cdot 0,5 \\ 2 &= v & & 2 \text{ m/s} = v \\ 2 \text{ m/s} &= v & & \end{aligned}$$

riešenie: výtah sa pohybuje rýchlosťou 2 m/s.

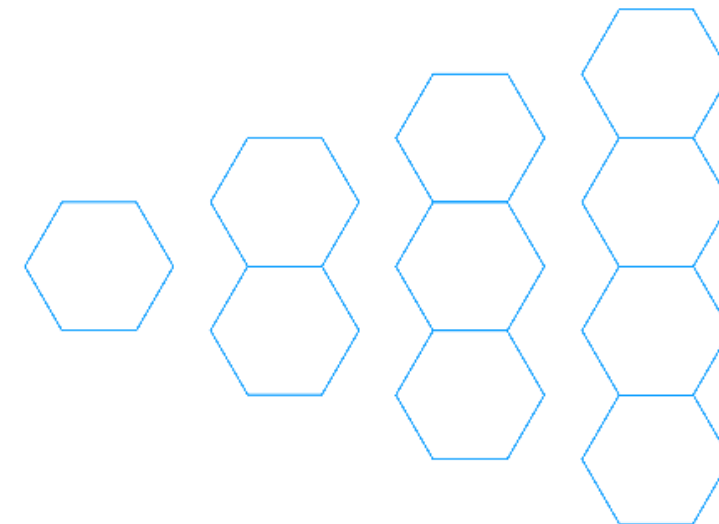
Úloha 2: Šesťuholníky

Prvý útvar (1 šesťuholník) má obvod 6.

Tretí útvar (3 šesťuholníky nad sebou) má obvod 14.

Druhý útvar (2 šesťuholníky nad sebou) má obvod _____.

Piaty útvar (5 šesťuholníkov nad sebou) má obvod _____.



A. Opíšte, ako by ste určili obvod útvaru, zloženého zo 100 šesťuholníkov nad sebou, bez toho, aby ste poznali obvod útvaru zloženého z 99 šesťuholníkov nad sebou.

B. Napíšte vzorec na výpočet obvodu pre ľubovoľný počet šesťuholníkov v reťazci nad sebou.

C. Vysvetlite prečo by mal byť váš vzorec správny.

Úloha 2: Šesťuholníky

$$o = 6 + (6 - 2)(n - 1)$$

$$o = 6n - 2(n - 1)$$

$$o = 5.2 + 4n$$

(b) Napište vzorec na výpočet obvodu pre ľubovoľný počet šesťuholníkov v reťazci nad sebou.

O = obvod útvaru v reťazci

n = počet 6-uhonikov v reťazci

o = obvod jedného šesuholníka

s = počet spoloných strán šesuholníkov v reťazci

$$O = (n \cdot o) - 2s$$

(c) Vysvetlite prečo by mal byť váš vzorec správny.

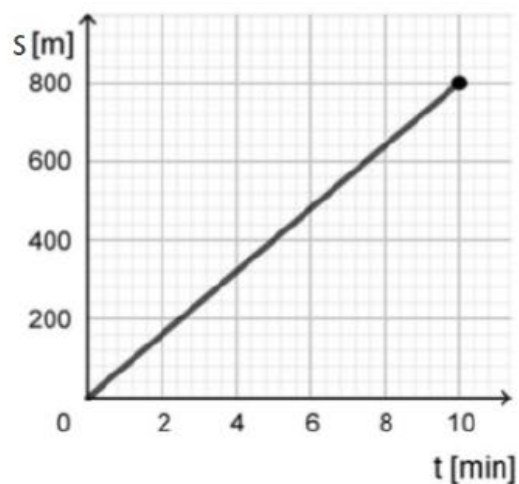
Poda ma je môj vzorec jednoducho pochopitený a jasný.

Úloha 3: Adam beží

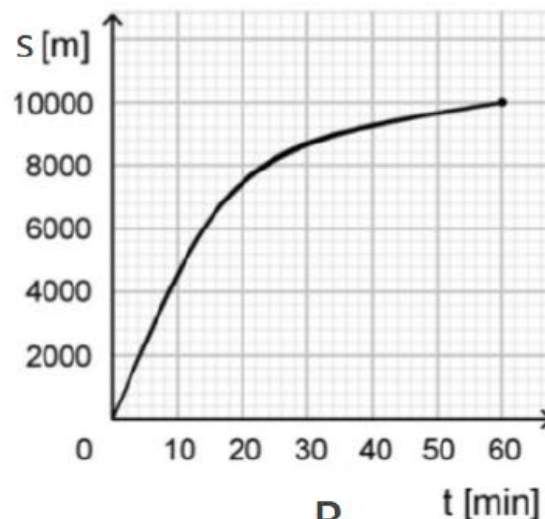
Adam vybehol z bodu **A** a odbehol 10 km (pozri obrázok).



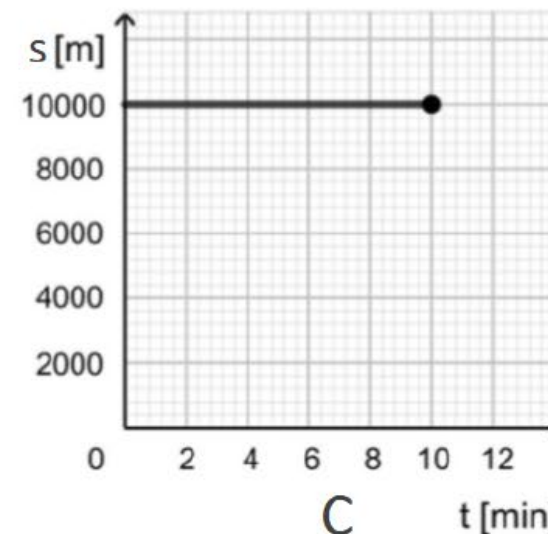
Vyberte graf (zakrúžkujte písmeno), ktorý môže popisovať jeho beh a svoj výber zdôvodnite.



A



B



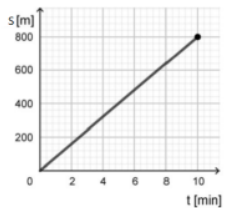
C

D

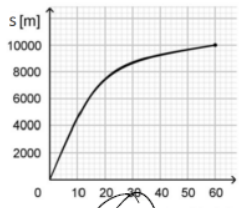
Žiadna z možností
nie je správna.

Poznámka: **S** označuje vzdialenosť Adama od bodu **A** (v metroch) a **t** označuje čas (v minútach).

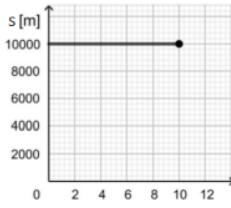
Úloha 3: Adam beží



A



B



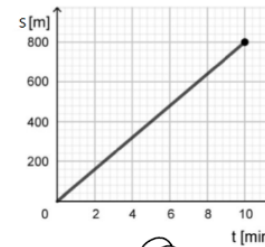
C

Žiadna z možností
nie je správna.

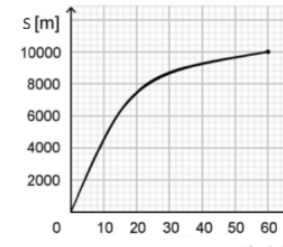
D

Svoj výber vysvetlite:

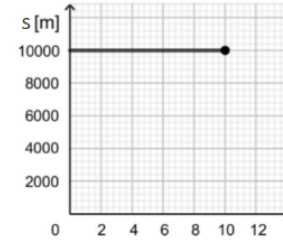
v prvý časť trate bežal rovnomerným pohybom väčšou rýchlosťou (strmší graf) a v poslednej časti už vládol menej, graf je menej strmý (nižšia rýchlosť), čas je 10 (realistický na 10 km)



A



B



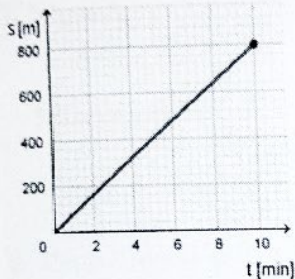
C

Žiadna z možností
nie je správna.

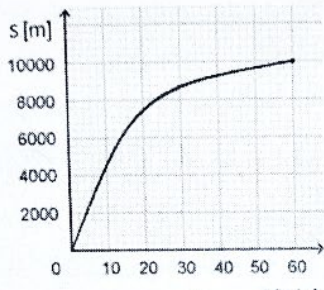
D

Svoj výber vysvetlite:

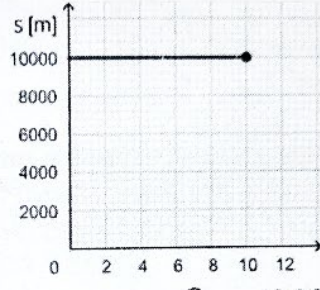
*C to nemôže byť pretože by od 0 minúto mal prejsť 10 km môže to byť B alebo A
B - vyjadruje že na začiatku bežal rýchlo a potom spomaliť
A - vyjadruje že bežal konšt. rých. 4.*



A



B



C

Žiadna z možností
nie je správna.

D

Svoj výber vysvetlite:

Adam počas behu určite nemal stále rovnaké tempo, spočiatku vládol viac, kým uschý, kedy nevládol bežať tak ako na začiatku, mohol mať prechodku na vodu, chvíľu mohol chodiť a následne zase bežať. ak by sme vybrali A alebo C znamená to že mal Adam celý beh rovnaké tempo, čo minimálne vylučuje. B mi tak isto nepríde vhodné, keď 10 min Adam urobí viac ako 4 km, čo je veľa km za krátky čas 4.

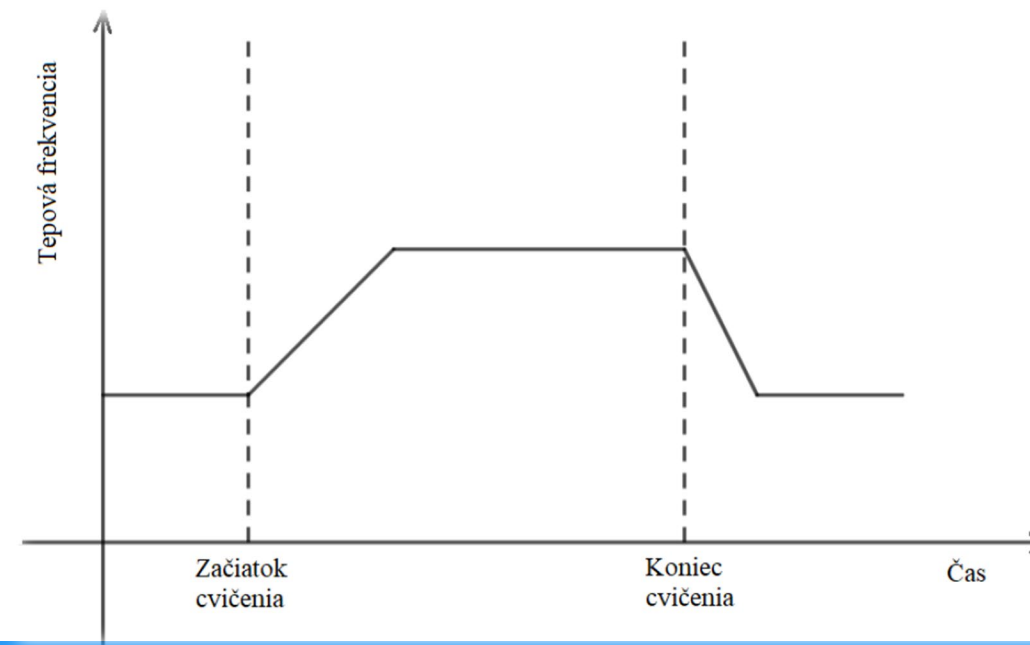
Úloha 4: Bez tréningu

V učebnici sa uvádza:

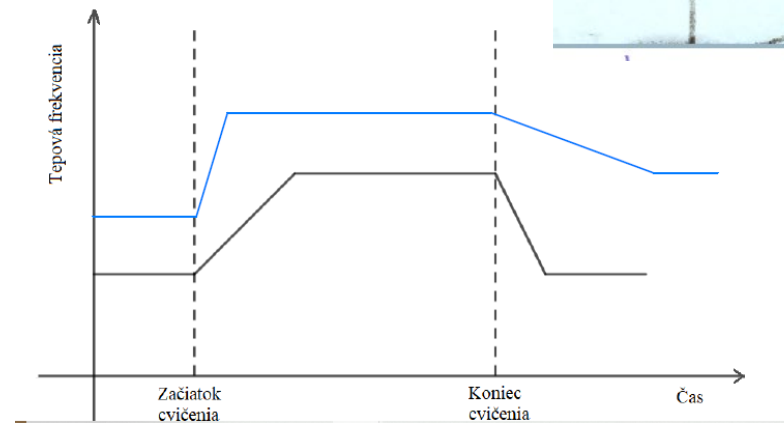
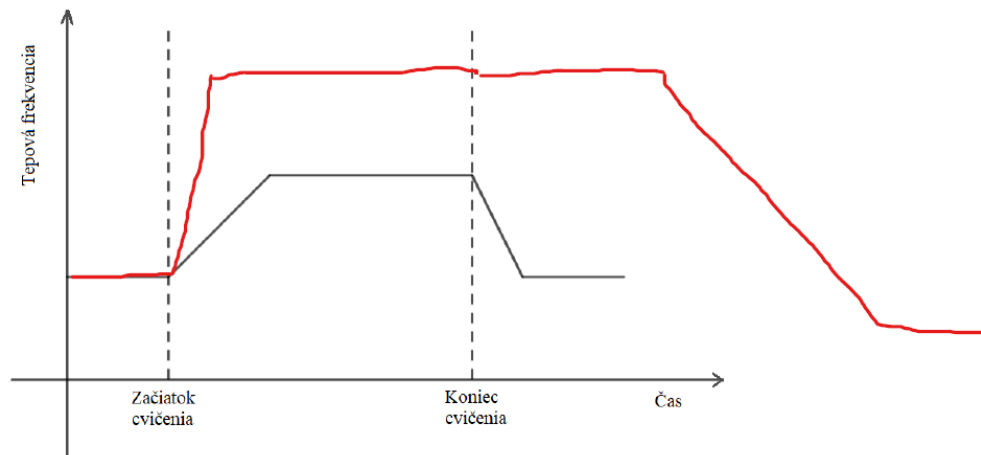
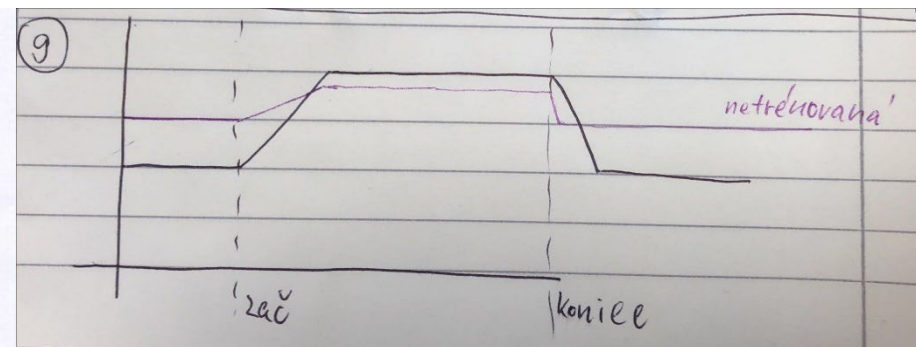
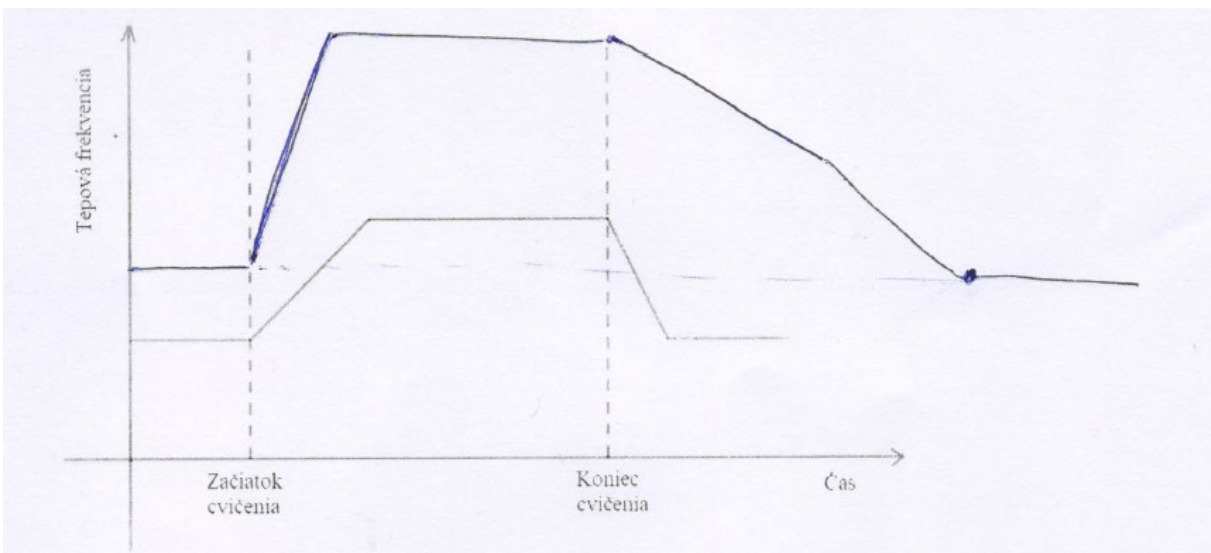
"Medzi priebehom srdcovej frekvencie pravidelne cvičiacej – trénovanej a netrénovanej osoby je niekoľko rozdielov:

- trénovaná osoba má nižšiu pokojovú srdcovú frekvenciu pred začiatkom cvičenia,
- jej srdcová frekvencia rastie pri cvičení pomalšie a dosahuje nižšie hodnoty,
- jej srdcová frekvencia klesá po skončení cvičenia rýchlejšie a v kratšom čase sa vracia na pokojovú hodnotu."

Na obrázku je graf srdcovej frekvencie trénovanej osoby. Do toho istého obrázku načrtnite, ako by vyzeral pri rovnakom cvičení graf srdcovej frekvencie netrénovanej osoby, spĺňajúci všetky uvedené rozdiely.



Úloha 4: Bez tréningu

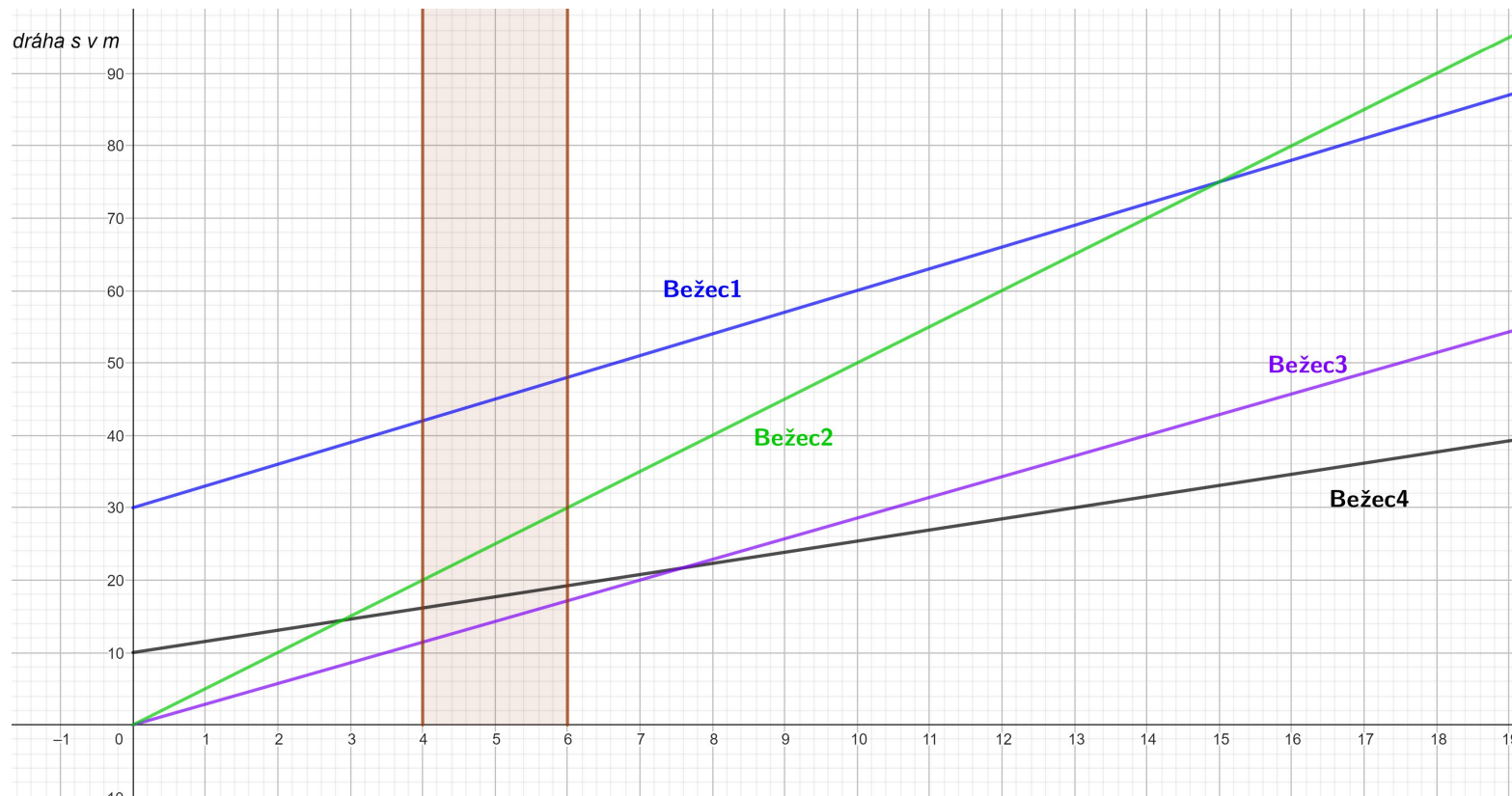


Úloha 5: Bežci

Z nasledujúceho obrázku zistíte tieto informácie:

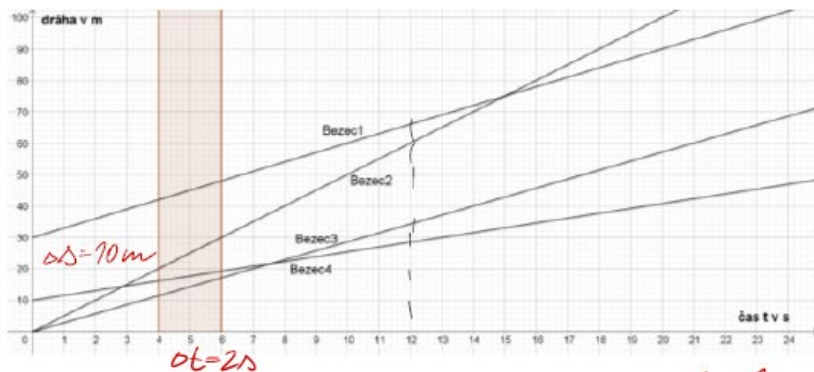
- A. Koľko metrov zabehne **Bežec 2** v časovom rozmedzí $t = 4\text{s}$ až $t = 6\text{s}$?
- B. Kedy je **Bežec 1** rýchlejší ako **Bežec 2**?
- C. Ktorý bežec je v čase $t = 12\text{s}$ najrýchlejší?

Zdôvodnite svoje odpovede.



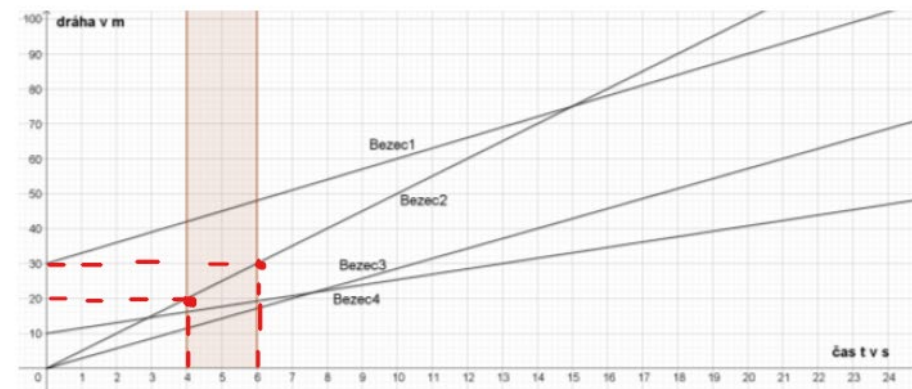
Úloha 5: Bežci

Z nasledujúceho obrázku zistite



- (a) Koľko metrov zabehne Bežec 2 v časovom rozmedzí $t = 4$ s až $t = 6$ s? $v_2 = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 5 \text{ m/s}$
 (b) Kedy je Bežec 1 rýchlejší ako Bežec 2? nikdy (graf B1 je vždy menej strmý ako B2 → vždy je 1.
 (c) Ktorý bežec je v čase $t = 12$ s najrýchlejší?
 bežec 2 → najstrmší graf

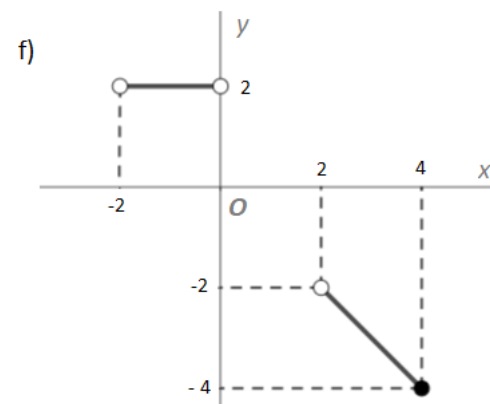
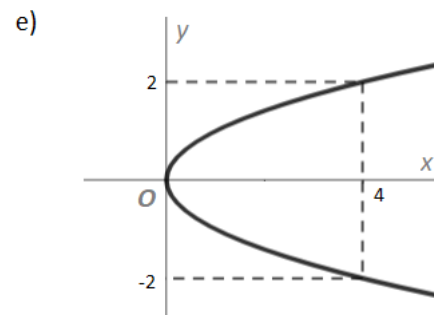
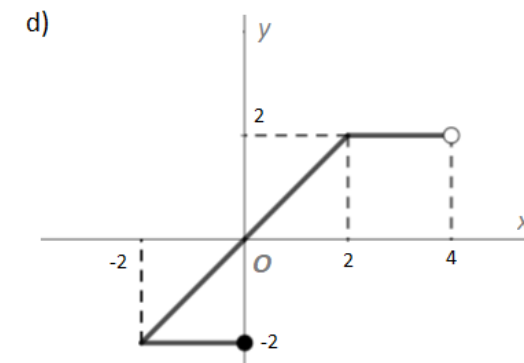
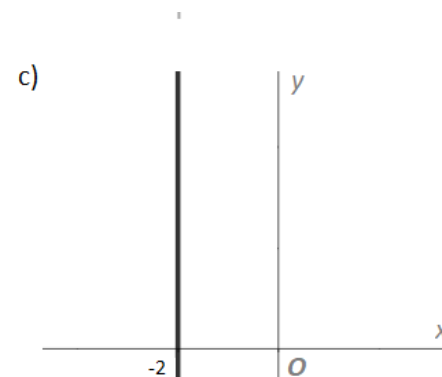
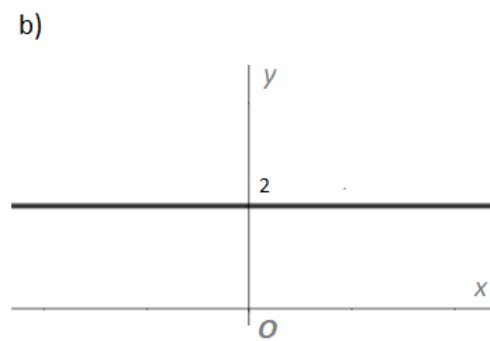
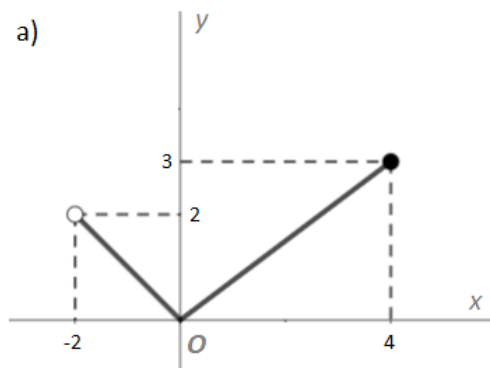
Z nasledujúceho obrázku zistite



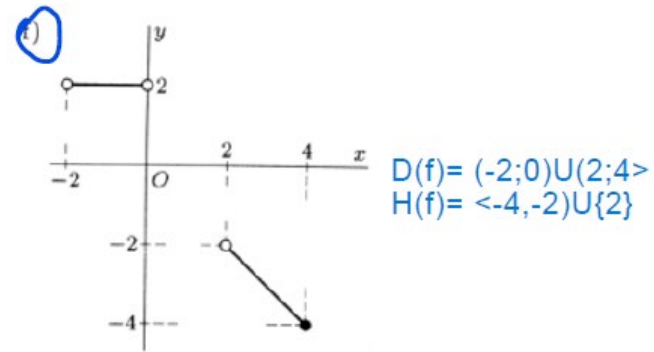
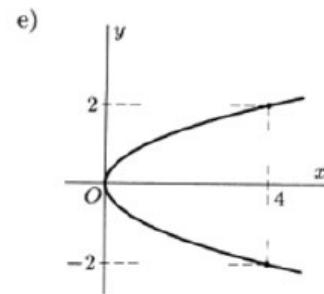
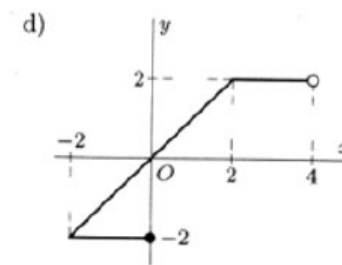
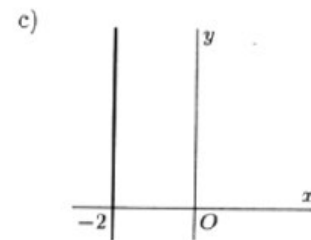
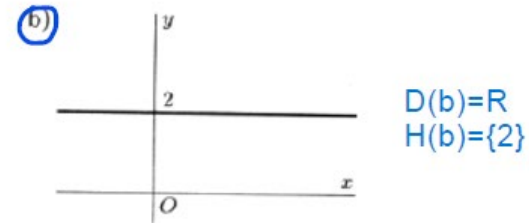
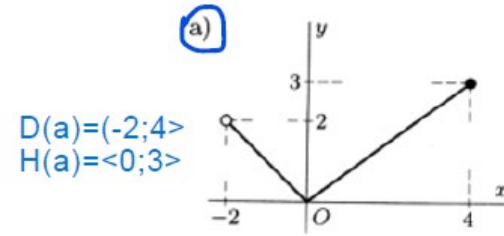
- (a) Koľko metrov zabehne Bežec 2 v časovom rozmedzí $t = 4$ s až $t = 6$ s? 10 metrov
 (b) Kedy je Bežec 1 rýchlejší ako Bežec 2? od začiatku, bežec 2 ho dobehne 15 sekunde
 (c) Ktorý bežec je v čase $t = 12$ s najrýchlejší? bežec 1

Úloha 6: Graf funkcie

Rozhodnite, ktoré z grafov znázornených na nasledujúcich obrázkoch. Sú grafom funkcie.
Ak je to možné, určte definičný obor a obor hodnôt.



Úloha 6: Graf funkcie



Úloha 7: Predpis z tabuľky

Pokračujte vo vypíňaní tabuľky a nájdite predpis funkcie:

x	1	2	100
$f(x)$	5	8	

Úloha 7: Predpis z tabuľky

7) úloha sa dá riešiť viacerými spôsobmi - niektoré majú zmysel ako funkcie, ktoré nachádzajú zadávaní bodmi a sú rovnočasne rovinné vzhľadom na osi.

Keď budeme uvažovať, že táto je lineárna funkcia:

Dobrá

$$\begin{array}{c|cccccccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 100 \\ \hline f(x) & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 & 20 & 23 & 302 \end{array} \Rightarrow f(x) = 3x + 2$$

Podobne

$$\begin{array}{c|cccccccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 100 \\ \hline f(x) & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 & 20 & 23 & 302 \end{array}$$

Pokračujte vo vyplňaní tabuľky a nájdite analytický predpis funkcie.

x	1	2	3	4	5	6	7	100
$f(x)$	5	8	11	14	17	20	23	302

8.

$$f(x) = 5 + 3(x-1)$$

$$f(100) = 5 + 3 \cdot 99 = 5 + 297 = 302$$

7.

Pokračujte vo vyplňaní tabuľky a nájdite analytický predpis funkcie.

x	1	2	100
$f(x)$	5	8	302

o

z grafu funkcie vidíme, že ide o lineárnu funkciu, kt. predpis je $y = ax + b$, do tohto vzorca dosadíme čísla z tabuľky:

$$\begin{aligned} 5 &= a \cdot 1 + b & 8 &= 2a + b \\ 5 - a &= b & 8 - 2a &= b \\ 5 - a &= 8 - 2a & 5 &= 1 \cdot 3 + b \\ a &= 3 & 2 &= b \\ & & y &= 3x + 2 \end{aligned}$$

Úloha 8: Slovný opis funkcie

Rozhodnite, či sú nižšie opísané vzťahy funkciami. Zakrúžkujte svoju odpoveď a zdôvodnite svoje rozhodnutie:

A. Závislosť ceny vstupného do zábavného parku od veku tak, ako je uvedená v tabuľke

Vek (roky)	Cena (€)
0 - 2	0
3 - 15	15
16+	25

Áno / Nie, Zdôvodnenie:

B. Obsah trojuholníka ABC , ktorý je priradený dĺžke jeho strany AB .

Áno / Nie, Zdôvodnenie:

C. Priradenie počtu viet na strane v učebnici matematiky číslu tejto strany.

Áno / Nie, Zdôvodnenie:

D. Žiakom vo vašej triede sú priradené mená ich súrodencov.

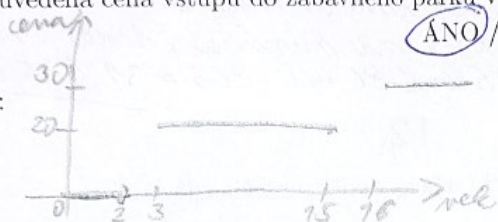
Áno / Nie, Zdôvodnenie:

Úloha 8: Slovný opis funkcie

i. V tabulke je uvedená cena vstupu do zábavného parku v závislosti od veku.

ÁNO / NIE

Zdôvodnenie:



Vek	Cena
0 - 2 roky	0 USD
3 - 15 rokov	20 USD
16+ rokov	30 USD

i. V tabulke je uvedená cena vstupu do zábavného parku v závislosti od veku.

ÁNO / NIE

Zdôvodnenie:

je to priama úmernosť
rastúca funkcia

Vek	Cena
0 - 2 roky	0 USD
3 - 15 rokov	20 USD
16+ rokov	30 USD

ii. Plocha rovnostranného trojuholníka je priradená k dĺžke jeho strany.

ÁNO / NIE

Zdôvodnenie:

$$S(a) = a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ii. Plocha rovnostranného trojuholníka je priradená k dĺžke jeho strany.

ÁNO / NIE

Zdôvodnenie:

strana	1	2	3
plôcha	$\frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2}$	$\frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2}$	$\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}$

Zdôvodnenie:

ÁNO / NIE

Každá strana má práve jeden počet viet (nemôže byť na jednej strane aj 5 aj 6 viet)

Zdôvodnenie:

ÁNO / NIE

môže byť viac strán s rovnakým počtom viet
a preto by neplatilo, že každému x je priradené práve 1 y .

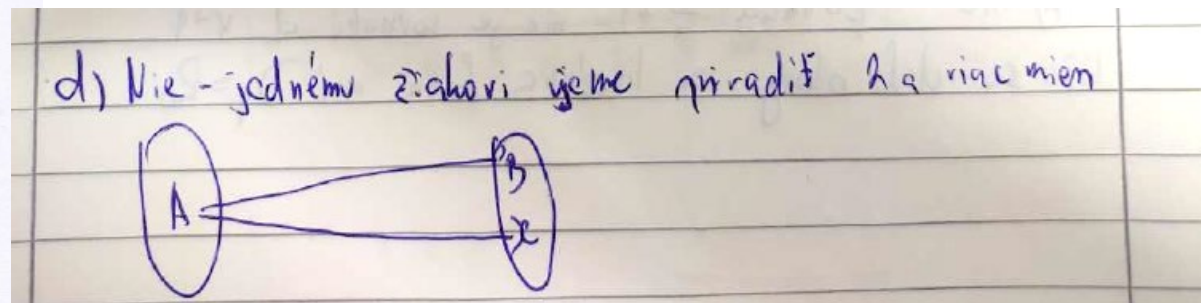
Úloha 8: Slovný opis funkcie

iv. Žiaci vo vašej triede sú priradené mená jeho súrodencov.

ÁNO / NIE

Zdôvodnenie:

- 1.) nemáme len číselné hodnoty
- 2.) Jednému menu /osobe priradíme aj viac rovnakých hodnôt.



iv. Žiaci vo vašej triede sú priradené mená jeho súrodencov.

ÁNO / NIE

Zdôvodnenie:

AK SÚ PRIRADENÉ ÁNO PRÍKLAD $\{a, b, c\}$ teda jedným príkladom ÁNO
ak nie... tak nie $\{a, b, c, d, e\}$

iv. Žiaci vo vašej triede sú priradené mená jeho súrodencov.

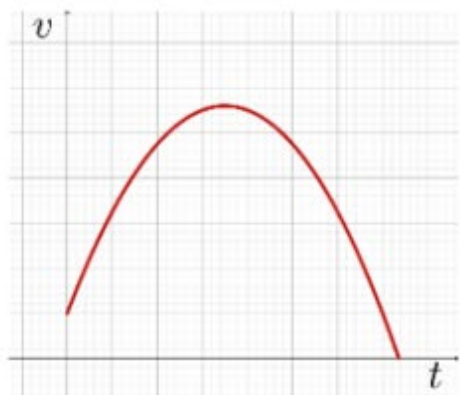
ÁNO / NIE

Zdôvodnenie:

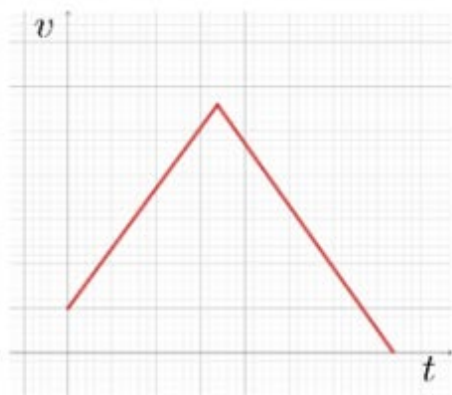
v triede môžu byť dvaja súrodenci
ktorí majú ďalšieho spoločného súrodenca

Úloha 9: Kameň

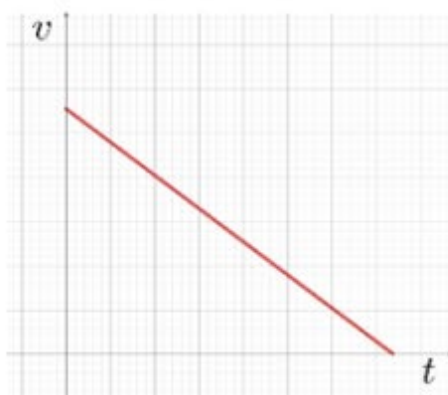
Kolmo hore bol hodený kameň. Vyberte jeden z grafov, ktorý ilustruje korešpondenciu rýchlosti a času (so zanedbaním odporu vzduchu). Svoj výber zdôvodnite.



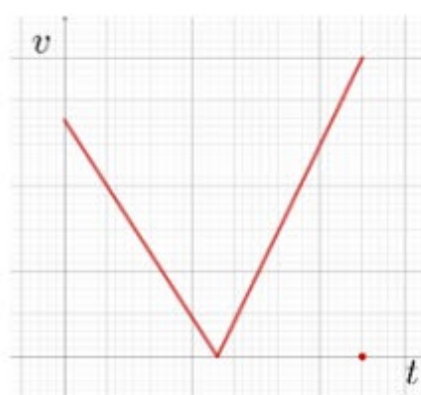
A



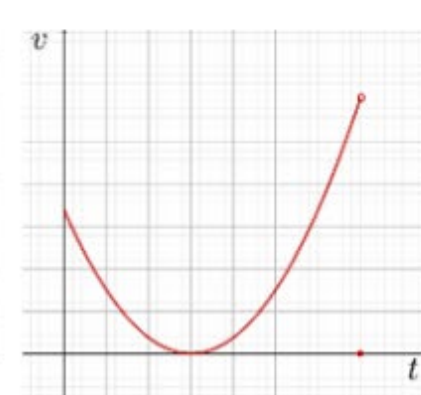
B



C

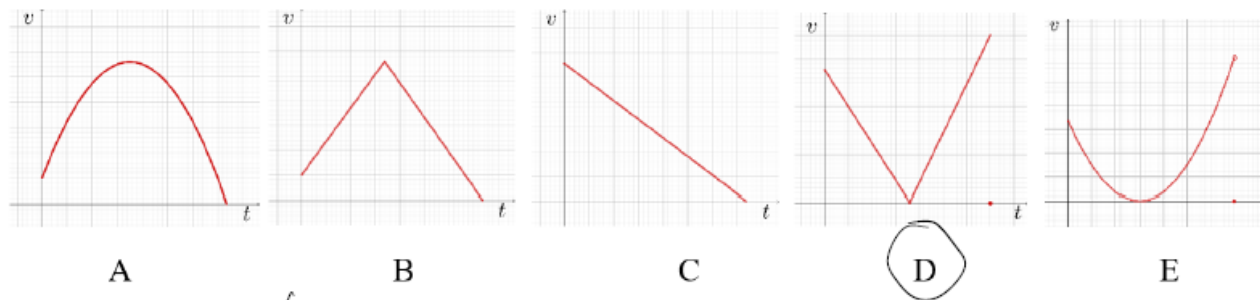


D



E

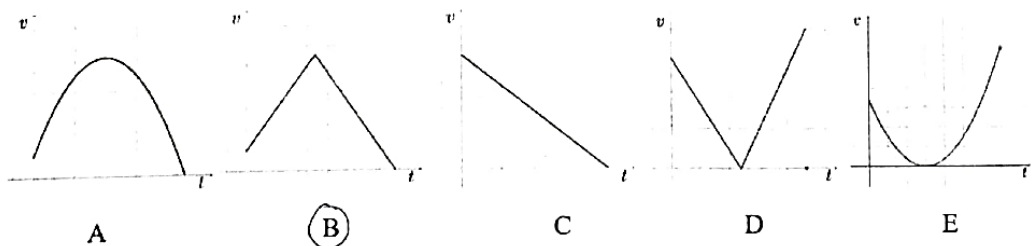
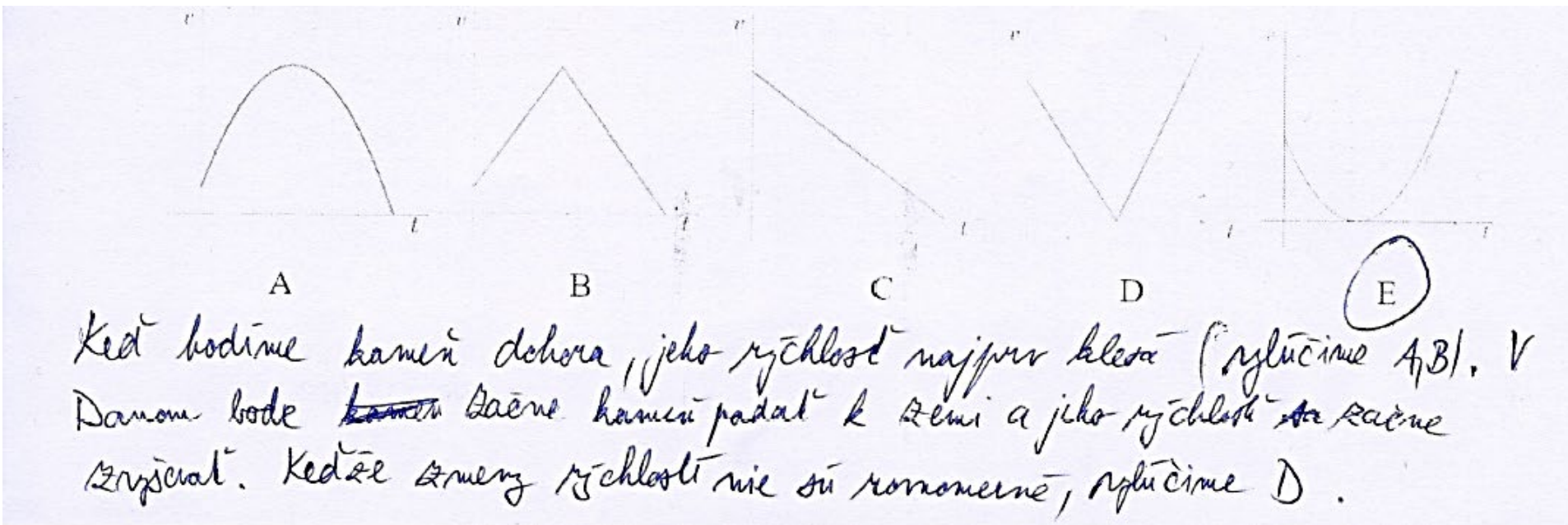
Úloha 9: Kameň



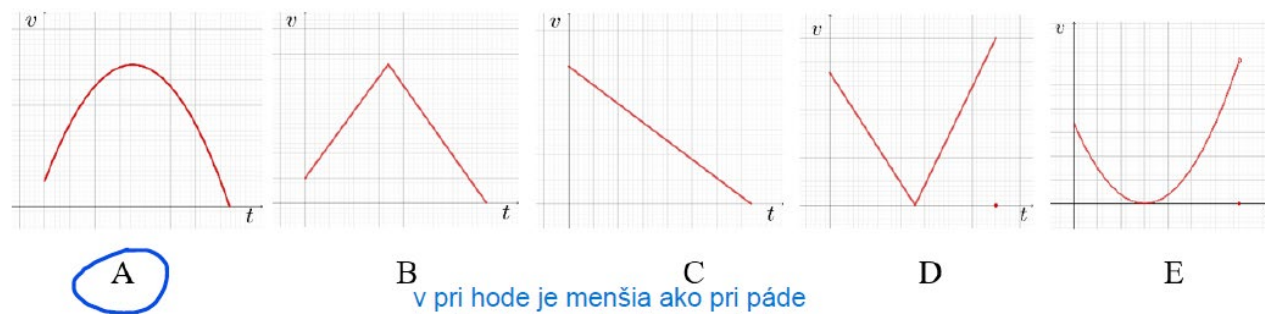
kameň vyhodíme rýchlosťou v_0 , ako obvyčaj, rýchlosť mu klesá, v najvyššom bode zastane a padá naspäť dole so symetrickým zväčšujúcim sa rýchlosťou
 $v = v_0 - gt \rightarrow$ lin. funkcia

9., D - po vyhodení kameňa hore rýchlosť kameňa klesala a v nejakom okamihu zastal a potom začal padáť dole a vplyvom gravitácie začal zrýchľovať.

Úloha 9: Kameň



kameň ide hore a ďalej odvíja, potom začne šíknú klesat'



v pri hode je menšia ako pri páde
t pri hode je „väčší“ ako pri páde
kameň padá rýchlejšie za kratší as

Helenka chce zorganizovať narodeninovú oslavu v detskej herni. Rozhoduje sa medzi týmito ponukami:

Ihrisko A: Cena za každého hosťa je 15 €. Žiadne ďalšie poplatky sa neplatia.

Ihrisko B: Cena za každého hosťa je 12 €. Navyše sa platia fixné náklady vo výške 50 €.

Ihrisko C: Cena za každého hosťa je 18 €. Z konečnej ceny bude poskytnutá zľava 30 €.

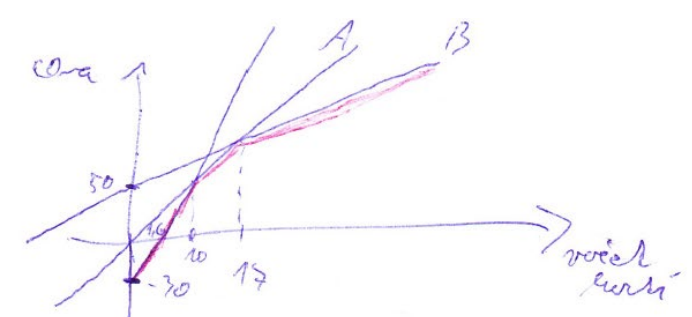
Ktorá ponuka je pre ňu najvýhodnejšia?

Úloha 10: Ihrisko

	10.)			$f(x) = 15x$	$g(x) = 12x + 50$	$h(x) = 18x - 30$												
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
f(x)	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225	240	255	
g(x)	62	74	86	98	110	122	134	146	158	170	182	194	206	218	230	242	254	
h(x)	-12	6	24	42	60	78	96	114	132	150	168	186	204	222	240	258	276	

Do 10 ľudí je najlepšie objednať ihrisko C
 Od 11 do 16 ľudí je najlepšie objednať A
 Od 17 vyšie je najlepšie objednať B

$A(x) = 15x$
 $B(x) = 12x + 50$
 $C(x) = 18x - 30$



Ideálne miesto =

- C ; pre 0 - 10 ľudí
- A ; pre 10 - 17 ľudí
- B ; pre 17 a viac ľudí.

Ktorá ponuka je pre ňu najvýhodnejšia? *Nevieme to jednoznačne určiť, závisí to od počtu ľudí.*

Ktorá ponuka je pre ňu najvýhodnejšia?

a: $y=15x$, b: $y=12x+50$, c: $y=18x-30$

závisí od počtu hostí

• **IHRISKO C:** Cena za každého hosťa je 18 €. Z toho každý hosť zaplatí 30 €.

Ktorá ponuka je pre ňu najvýhodnejšia? *závisí to od počtu ľudí.*

napr. ak je ľudí 20, potom:

A: $15 \cdot 20 = 300$
 B: $12 \cdot 20 + 50 = 290 \Rightarrow$ najvýhodnejšie
 C: $18 \cdot 20 - 30 = 330$

ak je ľudí 16:

A: $15 \cdot 16 = 240 \Rightarrow$ najvýhodnejšie
 B: $12 \cdot 16 + 50 = 242$
 11. C: $18 \cdot 16 - 30 = 258$

Úloha 11: Populácia

V tabuľke je populácia Nevady v rokoch 2000 až 2006.

Rok	Populácia (milióny)	Nárast populácie (milióny)
2000	2,020	
2001	2,093	0,073
2002	2,168	0,075
2003	2,246	0,078
2004	2,327	0,081
2005	2,411	0,084
2006	2,498	0,087

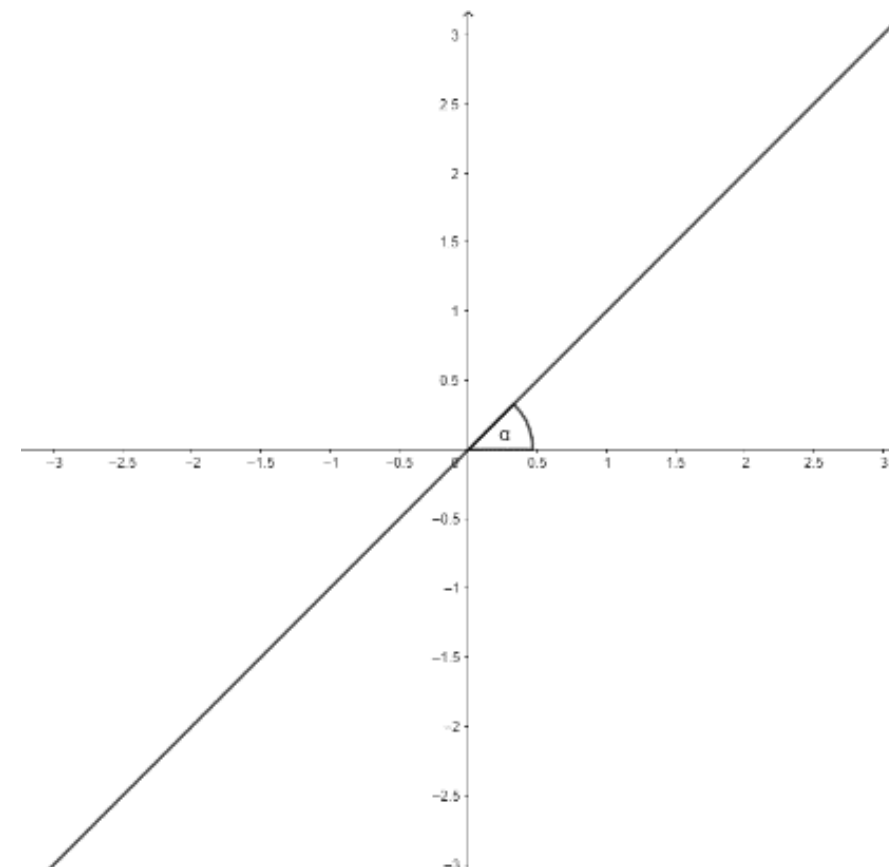
- A. Vydeľte populáciu v každom roku populáciou v predchádzajúcom roku. Čo pozorujete?
- B. Zapište, ako závisí veľkosť populácie od počtu rokov, ktoré uplynuli od roku 2000.

Úloha 12: Smernica

- A. Graf na obrázku predstavuje funkciu f takú, že $f: x \rightarrow x$.
- I. Aká je smernica funkcie f ? Ako ste ju určili?
 - II. Rozdelí graf funkcie f na polovicu uhol, ktorý zvierá kladná časť súradnicovej osi x s kladnou časťou súradnicovej osi y ? Áno / Nie

Zdôvodnenie:

- III. Viete vypočítať tangens uhla, ktorý zvierá graf funkcie f s kladnou časťou súradnicovej osi x ? Ak áno, určte jeho hodnotu. Ak nie – kvôli čomu?

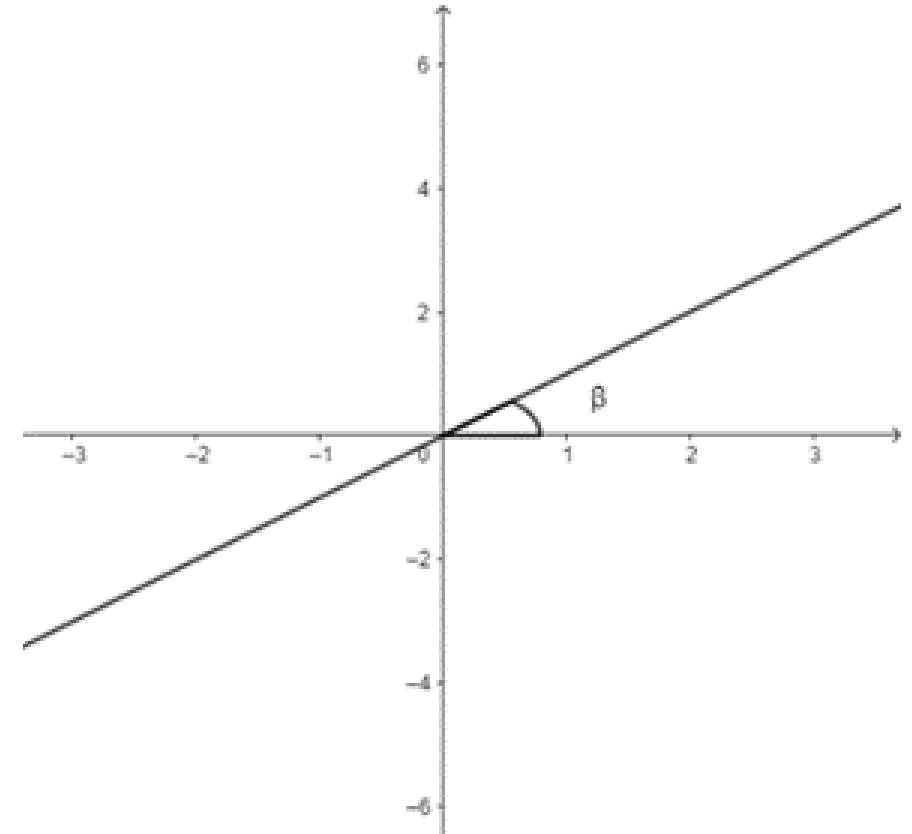


Úloha 12: Smernica

- B. Študent použil softvér na nakreslenie tej istej funkcie f . Ten mu ponúkol nasledovný graf:
- Aká je smernica funkcie f ? Ako ste ju určili?
 - Rozdelí graf funkcie f na polovicu uhol, ktorý zvierá kladná časť súradnicovej osi x s kladnou časťou súradnicovej osi y ? Áno / Nie

Zdôvodnenie:

- Viete vypočítať tangens uhla, ktorý zvierá graf funkcie f s kladnou časťou súradnicovej osi x ? Ak áno, určte jeho hodnotu. Ak nie – kvôli čomu?

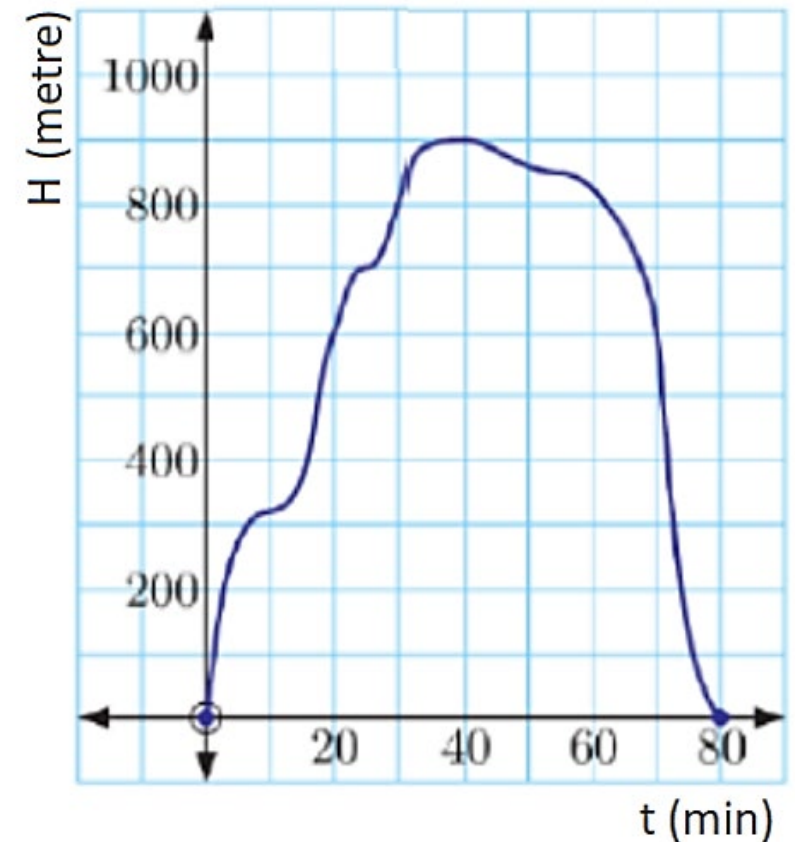


Úloha 13: Balón

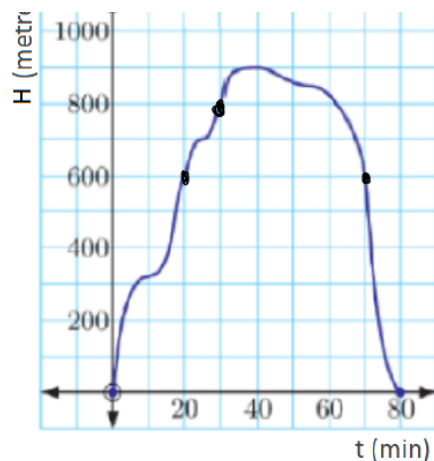
Pri jazde teplovzdušným balónom udáva funkcia H výšku balóna po t minútach letu. Jej graf je znázornený nižšie:

- Určte hodnotu $H(30)$ a svoju odpoveď vysvetlite v kontexte letu teplovzdušným balónom.
- Nájdite také hodnoty t , aby $H(t) = 600$. Vysvetlite svoju odpoveď v kontexte letu teplovzdušným balónom.
- Aký rozsah výšok bol zaznamenaný pre balón?
- Ako dlho trvala jazda balónom?
- Dokážete z grafu funkcie H odčítať vzdialenosť, ktorú balón prekonal? Áno / Nie

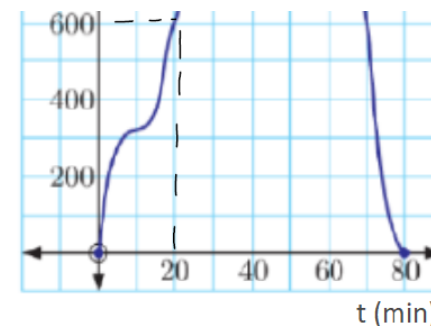
Zdôvodnenie:



Úloha 13: Balón



$H(30) = 800$
 ↑ teplovzdušný balón
 dosiahol za 30 min
 výšku 800 m.
 } $t = 20$ a 70
 v týchto časoch
 dosiahne
 výšku 600 m



→ za 30 min sa balón
 dostal do výšky 700 m
 za 20 min mal
 nadmorskú výšku
 600 m

- (a) Určte hodnotu $H(30)$ a svoju odpoveď vysvetlite v kontexte letu teplovzdušným balónom.
- (b) Nájdite také hodnoty t , aby $H(t) = 600$. Vysvetlite svoju odpoveď v kontexte letu teplovzdušným balónom.
- (c) Aký rozsah výšok bol zaznamenaný pre balón? → 0 - 900 m
- (d) Ako dlho trvala jazda balónom? → 80 min
- (e) Dokážete z grafu funkcie H odčítať vzdialenosť, ktorú balón prekonal? Zakrúžkujte ÁNO alebo NIE a zdôvodnite svoju odpoveď.

ÁNO / NIE

Zdôvodnenie: Na základe údajov ktoré máme nerovná

- (a) určte hodnotu $H(30)$ a svoju odpoveď vysvetlite v kontexte letu teplovzdušným balónom. ⁷⁰⁰
- (b) Nájdite také hodnoty t , aby $H(t) = 600$. Vysvetlite svoju odpoveď v kontexte letu teplovzdušným balónom. ²⁰
- (c) Aký rozsah výšok bol zaznamenaný pre balón? 0 - 900
- (d) Ako dlho trvala jazda balónom? 80 min
- (e) Dokážete z grafu funkcie H odčítať vzdialenosť, ktorú balón prekonal? Zakrúžkujte ÁNO alebo NIE a zdôvodnite svoju odpoveď.

ÁNO / NIE

Zdôvodnenie:

nerovná alebo ale dá sa

Úloha 14: Vlastnosti funkcie

- A. Existuje funkcia, ktorej definičný obor je $(0,5)$ a obor hodnôt je $\langle 2,5 \rangle$? Ak áno, nakreslite jej graf, zapíšte jej predpis alebo ju popíšte inak.
- B. Existuje funkcia, ktorej definičný obor je množina čísel $\{1,2,3\}$ a obor hodnôt je množina $\{1,2\}$? Ak áno, tak nakreslite jej graf, zapíšte jej predpis alebo ju popíšte inak.
- C. Existuje funkcia, ktorej definičný obor je množina čísel $\{1,2\}$ a obor hodnôt je množina $\{1,2,3\}$? Ak áno, tak nakreslite jej graf, zapíšte jej predpis alebo ju popíšte inak.
- D. Existuje funkcia, ktorá pre akékoľvek reálne čísla x, y spĺňa nasledujúce požiadavky? Ak áno, nakreslite jej graf alebo ju popíšte nejakou inak.

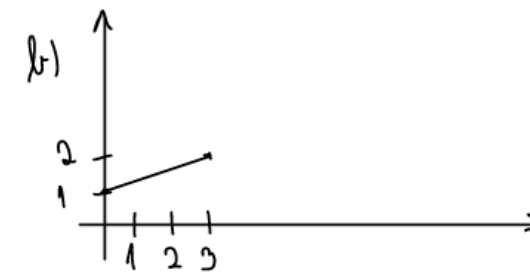
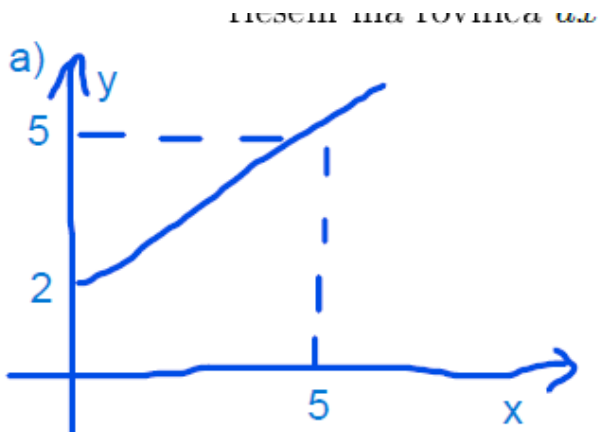
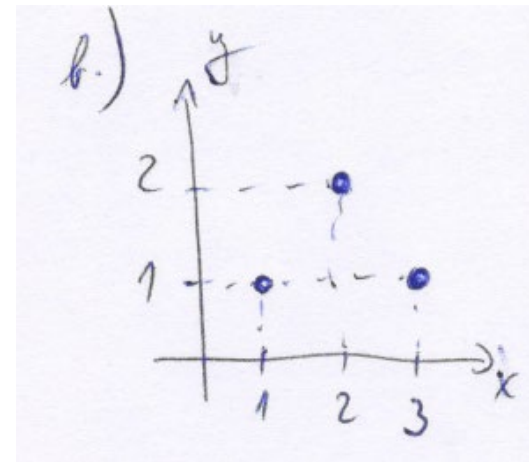
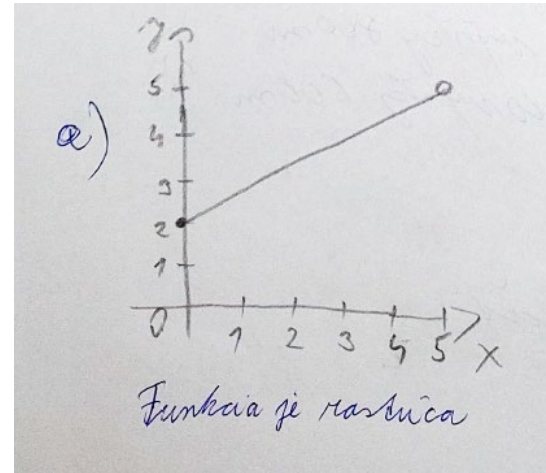
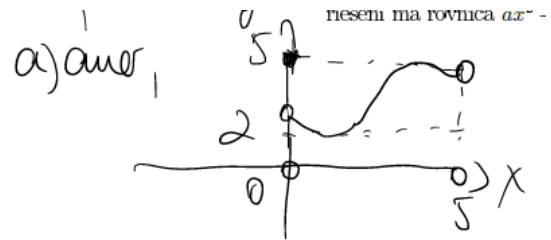
$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$$

- E. Ak vo výraze $ax^2 + bx + c$ dosadíme za x 1, dostaneme kladné číslo. Dosadením 6 získame záporné číslo. Koľko riešení má rovnica $ax^2 + bx + c = 0$? Svoju odpoveď zdôvodnite.

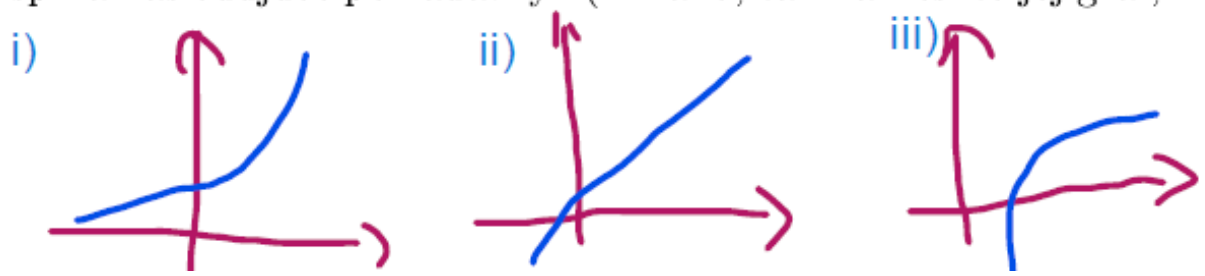
Úloha 14: Vlastnosti funkcie



Úloha 14: Vlastnosti funkcie

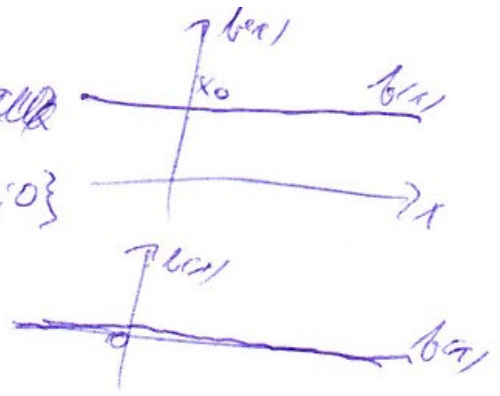
(c) Existuje funkcia, ktorá pre akékoľvek reálne čísla x, y spĺňa nasledujúce požiadavky? (Ak áno, tak nakreslite jej graf, zapíšte jej predpis alebo ju popíšte inak.)

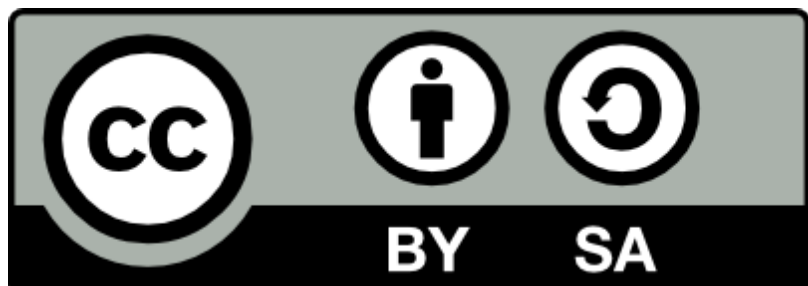
- i. $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ $y = e^x$
- ii. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ $y = x$
- iii. $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$? $y = \log x$



i) $e^{(x+y)} = e^x \cdot e^y \Rightarrow f(x) = e^x$
 ii) $f(x) = 2x$
 $2(x+y) = 2x + 2y$
 iii) $f(x) = \ln x$
 $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$

c) i) konstantná funkcia $f(x) = x_0$ ~~indefinovaná~~
 $x_0 \in \{1, 0\}$
 ii) konstantná nulová funkcia $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}$
 iii) analógia s ii)





This material is provided by the [FunThink Team](#).
Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under a Creative Commons License ([CC BY-SA 4.0](#)). Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Funkčné myslenie: aspekty, úlohy, reprezentácie

Názov kurzu

Meno lektora

Číslo sekcie:

Intelektuálny výstup projektu FunThink (Erasmus+)

Jedným slovom:
Čo je cieľom matematického vzdelávania?

Jedným slovom:
Čo je cieľom matematického vzdelávania?

MYSLENIE

4 úlohy

- Vyriešte nasledujúce štyri úlohy, každú viacerými spôsobmi (môžete porozmýšľať o tom, ako by úlohu riešili mladší či starší žiaci)
- Pri riešení sa zamýšľajte nad nasledovnými otázkami:
 - Čo odlišuje jednotlivé riešenia?
 - V čom sú riešenia rôznych úloh podobné?
 - Aké vedomosti a schopnosti sú potrebné pri riešení týchto úloh? Bud'te čo najviac konkrétni.

4 úlohy: Sviečka

Máme nasledujúcu situáciu:

"Sviečka je spočiatku vysoká 24 cm. Každú hodinu sa zmenší o 2 cm." Akú rovnicu by ste použili na vyjadrenie tejto situácie?

Aktivita:

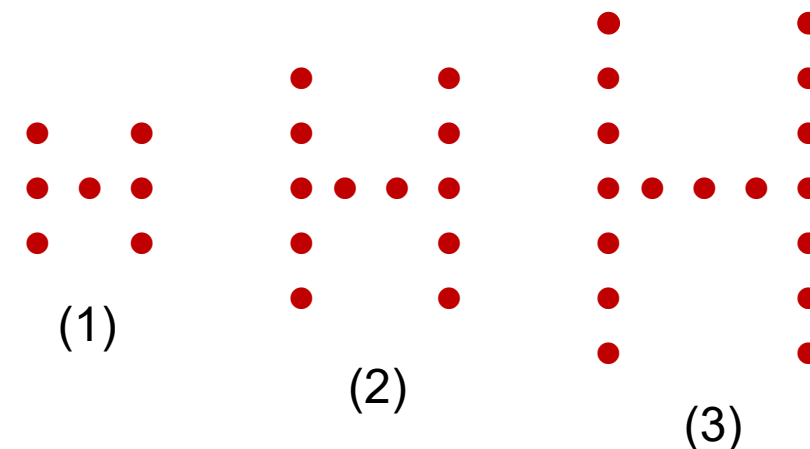
Vyriešte túto úlohu viacerými spôsobmi. Riešenia si zapíšte.

4 úlohy: Žetóny

Emil pomocou žetónov vytvoril prvé tri načrtnuté obrazce.

- a) Aký bude počet žetónov v piatom obrazci?
- b) Na určenie počtu žetónov pre všetky obrazce môžete použiť jeden z nasledujúcich troch vzorcov. Ktorý vzorec by si mal Emil vybrať? Označte správne políčko.

- $s = n + 6$ n udáva číslo vzoru
- $s = 5n + 2$ s udáva počet žetónov
- $s = 3n + 4$



Aktivita:

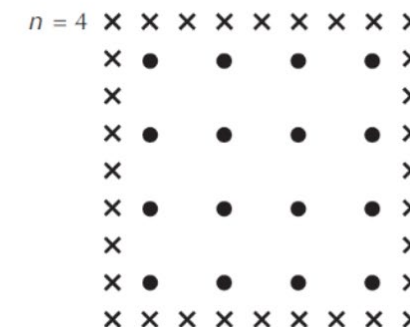
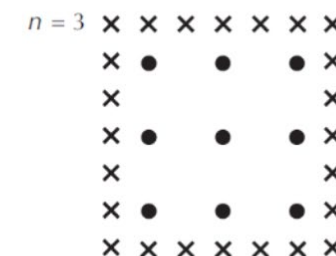
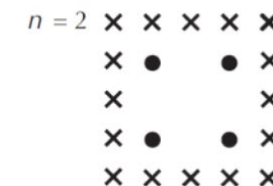
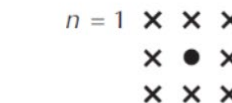
Vyriešte túto úlohu viacerými spôsobmi. Riešenia si zapíšte.

4 úlohy: Sad

Farmár sa rozhodol, že vo svojom sade vysadí jablone do štvorca. Kvôli ochrane pred vetrom vysadí okolo jabloní ihličnany (pozri obrázok). Doplňte tabuľku:

x = ihličnan
● = jablň

n	Počet jabloní	Počet ihličnanov
1	1	8
2	4	
..



Kedy (pre aké n) bude počet ihličnanov rovnaký ako počet jabloní?

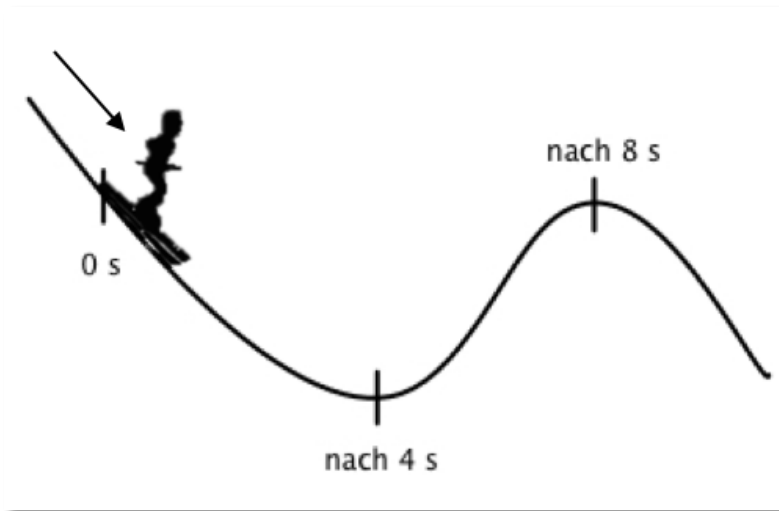
Aktivita:

Vyriešte túto úlohu viacerými spôsobmi. Riešenia si zapíšte.

4 úlohy: Lyžiar

Aktivita:

Vyriešte túto úlohu viacerými spôsobmi.
Riešenia si zapíšte.



(porovnaj Barzel & Ruchniewicz, 2020, s. 9)

Lyžiar má počiatočnú rýchlosť už v čase 0 sekúnd a potom sa nechá kĺzať dole kopcom (bez úmyselného brzdenia).

- A. Kedy je rýchlejší: v štvrtej alebo ôsmej sekunde?
- B. Opíšte slovami, ako sa mení jeho rýchlosť v čase.
- C. Druhý lyžiar prejde rovnakú vzdialenosť a má vyššiu počiatočnú rýchlosť ako prvý lyžiar. Porovnajte tieto dve jazdy slovne.

Aspekty funkcie a reprezentácie

Diskusia:

Čo odlišuje jednotlivé riešenia?

V čom sú riešenia rôznych úloh podobné?

Použité reprezentácie.

Spôsob nazerania
na funkciu.

Aspekty funkcie a reprezentácie

Diskusia:

Aké vedomosti a schopnosti sú potrebné na riešenie týchto úloh?

Žiaci musia opísať a interpretovať funkčné vzťahy v rôznych **reprezentáciách**.

Následne: prepájať a meniť tieto reprezentácie

Žiaci musia posudzovať funkčné vzťahy z rôznych **hľadísk/aspektov**.

Aspekty funkcie a reprezentácie

Diskusia:

Aké vedomosti a schopnosti sú potrebné na riešenie týchto úloh?

Žiaci musia opísať a interpretovať funkčné vzťahy v rôznych **reprezentáciách**.

Následne: prepájať a meniť tieto reprezentácie

Význam reprezentácií:

Prístup k matematickému objektu, ktorý je potrebný na tvorbu pojmov a riešenie problémov

(napr. Pittalis et al., 2020; Hußmann & Laakman, 2011)

- Pochopenie
- Prepojenie
- Zmena

Typicky používané reprezentácie funkcie:

- Grafy
- Rovnice
- Tabuľky
- Opisy a obrázky situácií

Diskusia:

Aké vedomosti a schopnosti sú potrebné na riešenie týchto úloh?

Žiaci musia uvažovať o funkčných vzťahoch z rôznych hľadísk/aspektov.

Aspekty: Malle, 2000; Pittalis et al., 2020; Vollrath, 1989)

- **Vstup-výstup:** skúmanie, ako určitá vstupná hodnota povedie k výstupnej hodnote; hľadanie pravidla
- **Korešpondencia:** pochopenie vzťahu medzi nezávislou a závislou premennou a schopnosť reprezentovať ho; formálnejšia definícia funkcie ako súboru usporiadaných dvojíc.
- **Kovariancia:** skúmanie, ako sa zmení jedna premenná, keď sa mení druhá.
- **Objekt:** funkcia sa považuje za matematický objekt s vlastnými reprezentáciami a vlastnosťami, ktorý možno porovnávať s inými matematickými objektmi alebo funkciami.

Aspekty funkcie a reprezentácie: Vstup – výstup

Aspekty: Malle, 2000; Pittalis et al., 2020; Vollrath, 1989)

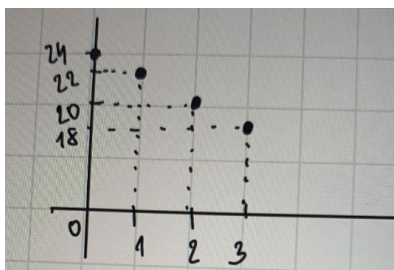
- **Vstup-výstup:** skúmanie, ako určitá vstupná hodnota povedie k výstupnej hodnote; hľadanie pravidla.

Reprezentácie:

- Reťazec čísel



- Graficky: Bod v súradnicovej sústave



- Tabuľka bez vnímaní akýchkoľvek ďalších vzťahov
- ~~Všeobecný predpis~~

Máme nasledujúcu situáciu:

"Sviečka je spočiatku vysoká 24 cm.
Každú hodinu sa zmenší o 2 cm."

Opíšte ju matematicky.

Aspekty funkcie a reprezentácie: Korešpondencia

Aspekty: Malle, 2000; Pittalis et al., 2020; Vollrath, 1989)

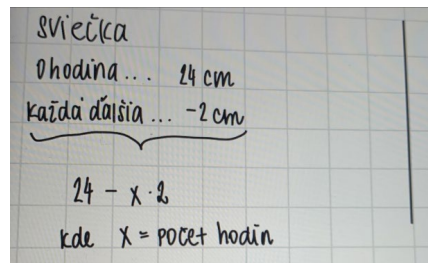
- **Korešpondencia:** pochopenie vzťahu medzi nezávislou a závislou premennou a schopnosť reprezentovať ho; formálnejšia definícia funkcie ako súboru usporiadaných dvojíc.

Reprezentácie:

- Tabuľka – ak žiak vníma jednotlivé usporiadané dvojice

Čas	0	1	2
Výška sviečky	24	22	20

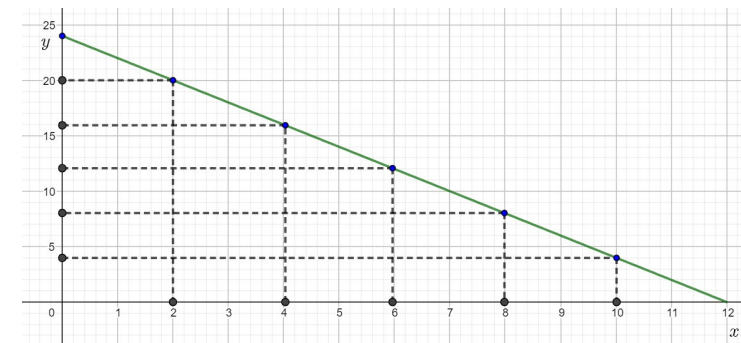
- Všeobecný predpis



Máme nasledujúcu situáciu:

"Sviečka je spočiatku vysoká 24 cm. Každú hodinu sa zmenší o 2 cm." Akú rovnicu by ste použili na vyjadrenie tejto situácie?

- Graficky
graf funkcie, kde žiak vníma usporiadané dvojice x a $f(x)$



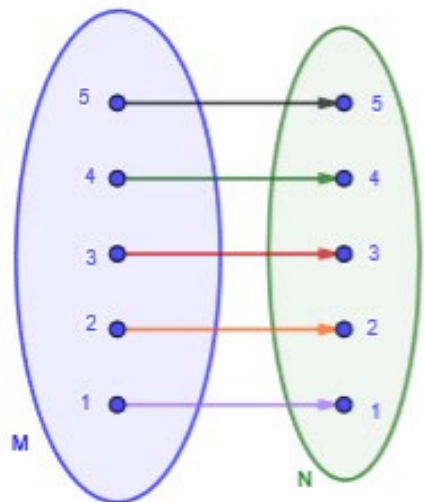
Aspekty funkcie a reprezentácie: Korešpondencia

Aspekty: Malle, 2000; Pittalis et al., 2020; Vollrath, 1989)

- **Korešpondencia:** pochopenie vzťahu medzi nezávislou a závislou premennou a schopnosť reprezentovať ho; formálnejšia definícia funkcie ako súboru usporiadaných dvojíc.

Reprezentácie:

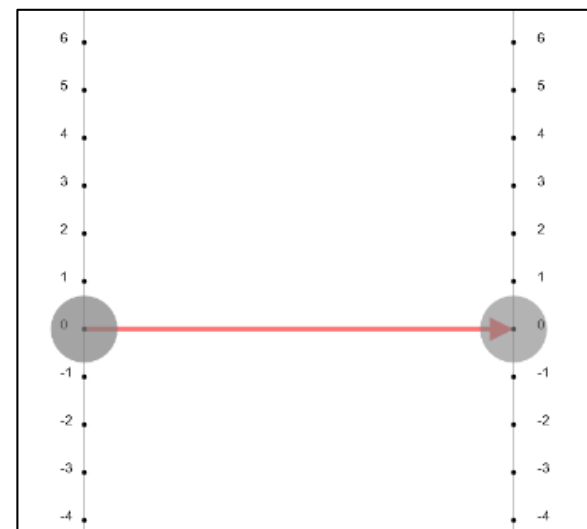
- Vennov diagram so šípkami



Máme nasledujúcu situáciu:

"Sviečka je spočiatku vysoká 24 cm. Každú hodinu sa zmenší o 2 cm." Akú rovnicu by ste použili na vyjadrenie tejto situácie?

- Nomogram



Aspekty funkcie a reprezentácie: Kovariancia

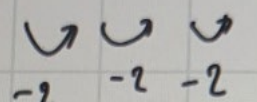
Aspekty: Malle, 2000; Pittalis et al., 2020; Vollrath, 1989)

➤ **Kovariancia:** skúmanie, ako sa zmení jedna premenná, keď sa mení druhá.

Reprezentácie:

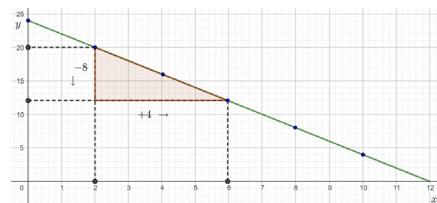
- Tabuľka – ak žiak vníma zmeny jednotlivých premenných

hodiny	0	1	2	3	...	12
výška	24	22	20	18		0



 -2 -2 -2

- Graficky – odčítanie zmeny a rýchlosti zmenu z grafu



- Smernica

Máme nasledujúcu situáciu:

"Sviečka je spočiatku vysoká 24 cm. Každú hodinu sa zmenší o 2 cm." Akú rovnicu by ste použili na vyjadrenie tejto situácie?

Aspekty funkcie a reprezentácie: Objekt

Aspekty: Malle, 2000; Pittalis et al., 2020; Vollrath, 1989)

- **Objekt:** funkcia sa považuje za matematický objekt s vlastnými reprezentáciami a vlastnosťami, ktorý možno porovnávať s inými matematickými objektmi alebo funkciami.

Reprezentácie:

- Predpis – využitie všeobecných predpisov funkcií ($y = ax + b$)
 - Identifikácia vlastností danej funkcie (klesajúca – záporné “ a ”)
- Graficky – využitie vlastností danej triedy funkcií (grafom lineárnej funkcie je priamka)
 - Identifikácia vlastností danej funkcie (klesajúca – správny sklon priamky)

Máme nasledujúcu situáciu:

"Sviečka je spočiatku vysoká 24 cm. Každú hodinu sa zmenší o 2 cm." Akú rovnicu by ste použili na vyjadrenie tejto situácie?

- Načrtnite graf funkcie $y = 2x + 3, x \in \mathbb{R}$.

Aktivita:

Vyriešte túto úlohu viacerými spôsobmi tak, aby ste využili rôzne aspekty pojmu funkcia.

Napište aj myšlienkový postup, ktorý máte v mysli.

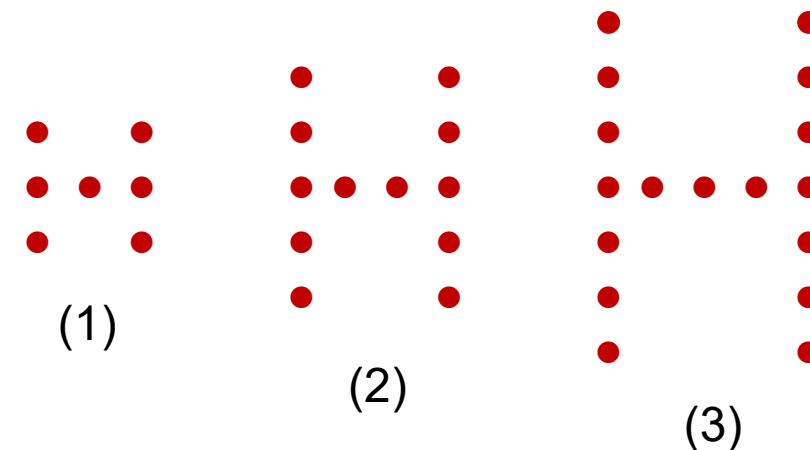
4 úlohy: Žetóny

Emil pomocou žetónov vytvoril prvé tri načrtnuté obrazce.

a) Aký bude počet žetónov v piatom obrazci?

b) Na určenie počtu žetónov pre všetky obrazce môžete použiť jeden z nasledujúcich troch vzorcov. Ktorý vzorec by si mal Emil vybrať? Označte správne políčko.

- $s = n + 6$ n udáva číslo vzoru
- $s = 5n + 2$ s udáva počet žetónov
- $s = 3n + 4$

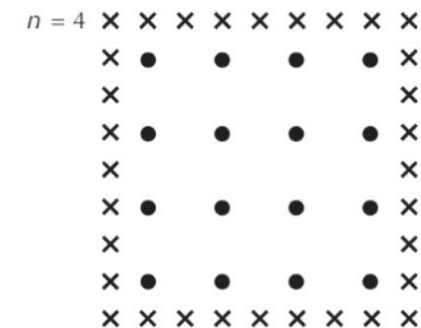
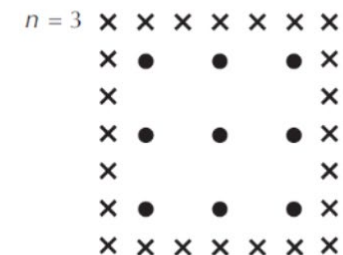
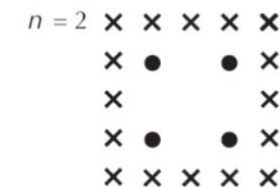
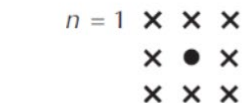


4 úlohy: Sad

Farmár sa rozhodol, že vo svojom sade vysadí jablone do štvorca. Kvôli ochrane pred vetrom vysadí okolo jabloní ihličnany (pozri obrázok). Doplňte tabuľku:

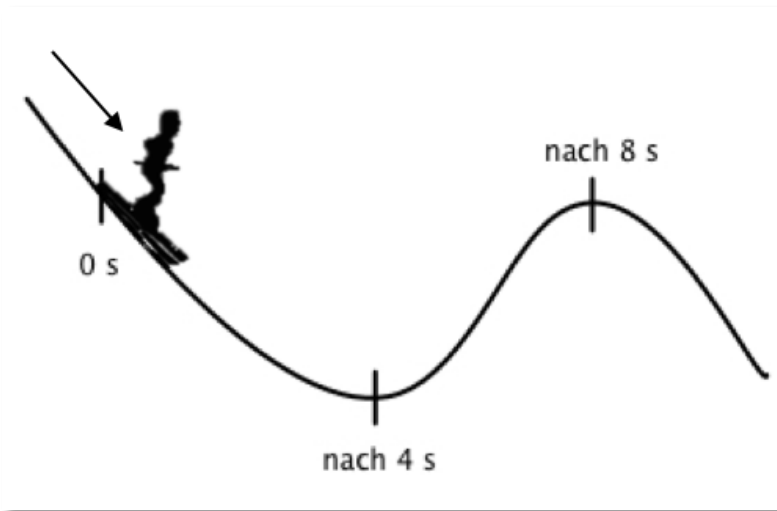
x = ihličnan
● = jablň

n	Počet jabloní	Počet ihličnanov
1	1	8
2	4	
..



Kedy (pre aké n) bude počet ihličnanov rovnaký ako počet jabloní?

4 úlohy: Lyžiar



(porovnaj Barzel & Ruchniewicz, 2020, s. 9)

- Lyžiar má počiatočnú rýchlosť už v čase 0 sekúnd a potom sa nechá kĺzať dole kopcom (bez úmyselného brzdenia).
- A. Kedy je rýchlejší: v štvrtej alebo ôsmej sekunde?
 - B. Opíšte slovami, ako sa mení jeho rýchlosť v čase.
 - C. Druhý lyžiar prejde rovnakú vzdialenosť a má vyššiu počiatočnú rýchlosť ako prvý lyžiar. Porovnajte tieto dve jazdy slovne.

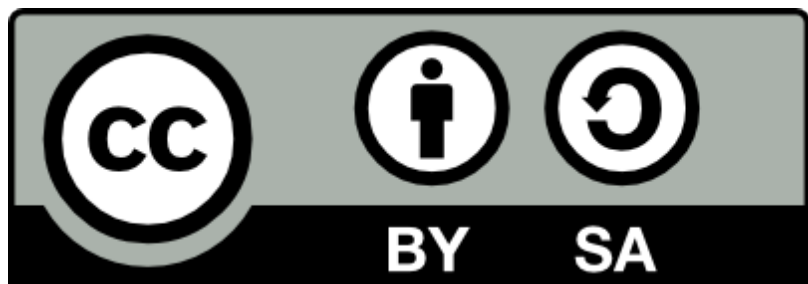
- Ktorú z úloh by ste vybrali, keby ste chceli zistiť, **ktorý aspekt žiaci prirodzene preferujú?**
 - A. Sviečka
 - B. Žetóny
 - C. Sad
 - D. Lyžiar
- Ktorú z úloh by ste vybrali, keby ste chceli zistiť, **či žiaci vedia využiť kovarianciu?**
 - A. Sviečka
 - B. Žetóny
 - C. Sad
 - D. Lyžiar

Ktoré úlohy by ste vybrali, ak by ste chceli:

- v žiackom riešení vidieť **vstupno-výstupný aspekt?**
- v žiackom riešení vidieť **kovariančný aspekt?**
- v žiackom riešení vidieť **korešpondenčný aspekt?**
- v žiackom riešení vidieť **aspekt funkcia ako objekt?**
- zistiť, **ktoré aspekty žiaci uprednostňujú?**

V skupine vytvorte poster k pridelenému aspektu funkcie

- **Zahrňte všetky dôležité informácie: reprezentácie, úlohy, riešenia, atď.**



This material is provided by the [FunThink Team](#).
Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under a Creative Commons License ([CC BY-SA 4.0](#)). Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Funkčné myslenie v kurikule

Názov kurzu

Meno lektora

Číslo sekcie:

Intelektuálny výstup projektu FunThink (Erasmus+)

Čo znamená rozvíjanie funkčného myslenia?

Čo znamená rozvíjanie funkčného myslenia?

ASPEKTY

- vnímať koncept funkcie v jeho rozmanitosti
 - **vstup-výstup**
 - **kovariancia**
 - **korešpondencia**
 - **objekt**
- použitie vhodného aspektu vzhľadom na situáciu

REPREZENTÁCIE

- porozumenie reprezentáciám
 - **graf**
 - **predpis**
 - **tabuľka**
 - **slovný popis**
 - ...
- tvorba reprezentácií
- zmena reprezentácie
- výber vhodnej reprezentácie vzhľadom na situáciu

APLIKÁCIE

- vidieť a využívať funkcie a funkčné myslenie v rámci matematiky
- vidieť a využívať funkcie a funkčné myslenie mimo matematiky

Úloha - Štúdium učebných materiálov

- Každá skupina má pridelený typ školy, v ďalších úlohách sa zamerajte na tento typ.
 - A. Naštudujte si kurikulárne dokumenty pre daný typ školy.
 - B. Rozdeľte 12 bodov medzi jednotlivé aspekty podľa toho, akú dôležitosť majú na danom type školy / stupni.
 - C. Ku každej reprezentácii uveďte, či sa na danom type školy / stupni (P – používa, I - používa "vstupne", "prípravne", "propedeuticky", X – nepoužíva). Vo voľnom priestore vysvetlite dôležité informácie. Napr. ako prípravne sa daná reprezentácia používa, kvôli čomu sa nepoužíva, aké iné reprezentácie sa vyskytujú.
 - D. Vypíšte konkrétne matematické témy, v ktorých je možné rozvíjať funkčné myslenie. Vysvetlite ako.
 - v rámci okruhu funkcie
 - mimo okruh funkcie
 - E. Vypíšte niekoľko aplikácií matematiky do praxe, iného predmetu, ktoré sú využiteľné s učivom daného typu školy.

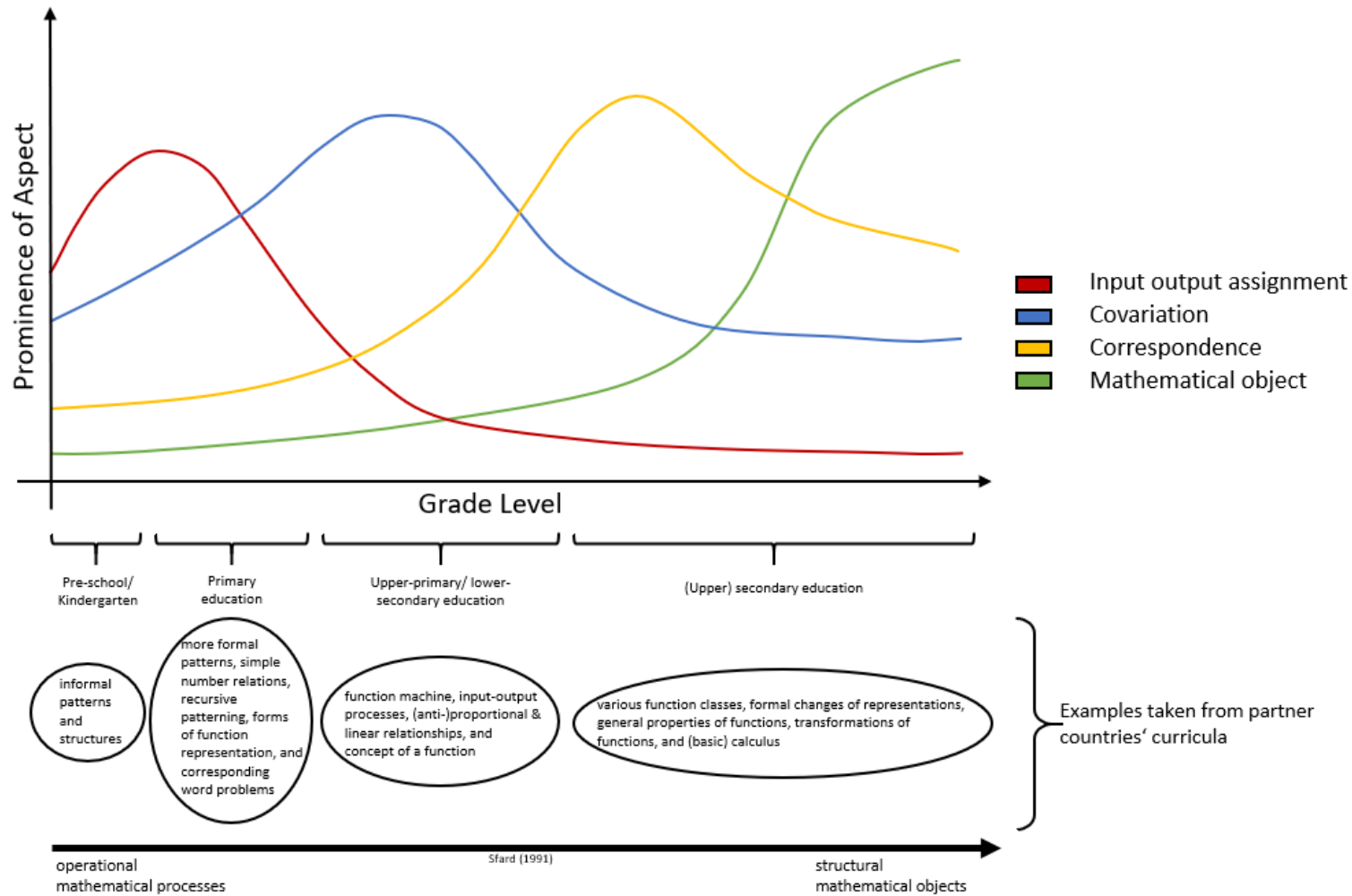
Aspekty v kurikule

	1. Stupeň ZŠ	2. Stupeň ZŠ	SŠ -- prax	SŠ – VŠ bez M	SŠ – VŠ s M
Vstup-výstup					
Kovariancia					
Korešpondencia					
Objekt					

Aspekty v kurikule

	1. stupeň ZŠ	2. stupeň ZŠ	SŠ -- prax	SŠ – VŠ bez M	SŠ – VŠ s M
Vstup-výstup	7				
Kovariancia	2				
Korešpondencia	2				
Objekt	1				

Aspekty v kurikule



Vysvetlite štyri aspekty funkcie na nasledujúcich funkciách:

A: $y = \sin x, x \in \mathbb{R}$

B: $y = \cos x, x \in \mathbb{R}$

Reprezentácie v kurikule

	1. Stupeň ZŠ	2. Stupeň ZŠ	SŠ -- prax	SŠ – VŠ bez M	SŠ – VŠ s M
Graf					
Predpis					
Tabuľka					
Slovný popis					
Iné					

Reprezentácie v kurikule

	1. stupeň ZŠ	2. stupeň ZŠ	SŠ -- prax	SŠ – VŠ bez M	SŠ – VŠ s M
Graf	I	P	P	P	P
Predpis	I	I - P	P	P	P
Tabuľka	P	P	P	P	P
Slovný popis	I	I - P	P	P	P
Iné	Reťazec, nomogram, Vennové diagramy, ...				

Reprezentujte funkciu $y = 5x + 10, x \in \mathbb{R}$ rôznymi spôsobmi.

A: Vysvetlite, ako rôzne reprezentácie poukazujú na dané aspekty funkcie.

B: Diskutujte o tom, aké sú výhody a obmedzenia týchto reprezentácií.

- **Čo je potrebné k tomu, aby sme vedeli korektne používať grafickú reprezentáciu?**
- **Rozvíjanie pojmu číslo**
 - $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$
 - Kedy je číselná os „plná“?
- **Súradnicová sústava**
 - propedeutika – súradnice v šachovnici a vyplňanie tabuľky
 - problémy s poradím:
 - v šachovnici sú A1 a 1A sú to isté políčko
 - v tabuľke je pre mnoho ľudí prioritnejší riadok (y – súradnica) pred stĺpcom (x – súradnica)
 - políčko v šachovnici / tabuľke vs. bod v súradnicovej sústave

Čo je potrebné k tomu, aby sme vedeli korektne používať predpis?

▪ Rôzne chápanie písmena v matematike

- 1. Písmeno zastupuje jednu konkrétnu hodnotu**
označuje neznáme číslo, ktoré určíme logickou úvahou, resp. uhádnutím (nie s použitím ekvivalentných úprav rovníc), napríklad Aké číslo máme dosadiť za x , aby platila rovnosť: $x-5=12$.
- 2. Hodnotu písmena nepotrebujeme poznať**
napríklad v úlohe: Pre čísla x a y platí, že $x+y=10$. Čomu sa rovná $x+y-8$?
- 3. Písmeno ako označenie**
ide o dohodnuté označenie, pomenovanie, napríklad písmená a , b , c označujú strany trojuholníka, písmeno t označuje tonu, a podobne. Napríklad $3f=1y$, kde f označuje stopu (feet) a y označuje yard.
- 4. Písmeno ako jedna neznáma hodnota**
písmeno zastupuje jedno konkrétne číslo, často hovoríme o neznámej, ktorá sa môže vyskytovať pri rovniciach alebo pri úprave výrazov, napríklad $3x-5=4x$. Pri práci s písmenom v tomto kontexte používame napríklad rôzne metódy úpravy rovníc vrátane ekvivalentných úprav.
- 5. Písmeno nadobúda viac ako jednu hodnotu (ľubovoľnú hodnotu z definičného oboru)**
písmeno tu označuje niekoľko čísel (aj nekonečne veľa), ako napríklad v nerovnici $4x-5<15$. Pri práci s písmenom na úrovni písmeno ako neznáma, napríklad pri úprave rovníc, pritom často využívame aj písmeno v tomto kontexte.
- 6. Písmeno ako konštanta**
napríklad π , e .
- 7. Písmeno ako parameter**
napríklad písmená k a q v zápise všeobecného predpisu lineárnej funkcie $y=kx+q$
- 8. Písmeno ako premenná**
v tomto kontexte sa žiaci stretávajú s písmenom v súvislosti s pojmom funkcia, ktorý sa v školskej matematike objavuje aj implicitne pred jeho zavedením, napríklad v súvislosti so skúmaním závislosti dráhy od času.

Okruh funkcie v kurikule

1. stupeň ZŠ	2. stupeň ZŠ	SŠ -- prax	SŠ – VŠ bez M	SŠ – VŠ s M

Okruh funkcie v kurikule

1. stupeň ZŠ	2. stupeň ZŠ	SŠ -- prax	SŠ – VŠ bez M	SŠ – VŠ s M
propedeutika	Priama a nepriama úmernosť Lineárna funkcia			

- **Ktoré vlastnosti funkcie resp. pojmy môžeme preberať pri ktorých funkciách?**

Lineárna funkcia	Monotónnosť Inverzná funkcia
Mocninové funkcie	Párnosť / Nepárnosť
Goniometrické funkcie	Periodicita
Exponenciálna, Logaritmická	Monotónnosť Inverzná funkcia

Funkcie v iných okruhoch matematického kurikula

1. stupeň ZŠ	2. stupeň ZŠ	SŠ -- prax	SŠ – VŠ bez M	SŠ – VŠ s M

- **Geometrické vzorce (obvody, obsahy, ...) ako funkcie**
 - Tvorba tabuliek
 - Všímanie si rozdielov a podobností medzi tabuľkami (obsah štvorca rastie rýchlejšie ako jeho obsah)
- **Zhodnosť a podobnosť útvarov**
 - Pomer a priama úmernosť
- **Analytické rovnice niektorých geometrických útvarov**
 - Kvadratická funkcia – parabola, Lineárna funkcia – priamka, ...
- **Rovnice a nerovnice**
 - Grafické riešenia rovníc a nerovníc
 - Využívanie vlastností funkcií pri argumentácii úprav (zmena znamienka, lebo funkcia je klesajúca; neekvivalentnosť úpravy, lebo funkcia nie je prostá, ...)
- **Štatistické modely**
 - Lineárna funkcia ako regresná priamka

Kde môžete vidieť funkcie?

Máte **10 minút** na to, aby ste sa prešli po budove univerzity a spísali zoznam všetkých pozorovaných funkčných závislostí. Vyhráva skupina s najdlhším a zároveň zmysluplným zoznamom!

Funkcie v iných predmetoch – príklady aplikácií

1. stupeň ZŠ	2. stupeň ZŠ	SŠ -- prax	SŠ – VŠ bez M	SŠ – VŠ s M

▪ Chémia:

- vypočítať hmotnostný zlomok zložky v roztoku; hmotnosť rozpustenej látky, rozpúšťadla a roztoku
- uskutočniť pokusy na meranie tepelných zmien pri chemických reakciách, zaznamenať výsledky pokusov do tabuliek a interpretovať ich,

▪ Geografia:

- opísať zdanlivú dráhu Slnka a Mesiaca na oblohe (obrázkoch, náčrtoch),
- určiť podľa mapy časových pásem, kde na Zemi je viac hodín ako na Slovensku a kde menej,
- určiť vybrané miesto na mape pomocou geografických súradníc
- porovnať na mapách rôznych grafických mierok vzdialenosti,
- Porozprávať o cestovaní balónom od rovníka do polárnych krajín -> zosumarizovať zmeny v ovzduší so stúpajúcou výškou

▪ Fyzika:

- analyzovať grafy, vysvetliť priebeh grafu, spracovať namerané hodnoty formou grafu (všeobecne)
- zostrojiť graf lineárnej závislosti dráhy od času pre rovnomerný priamočiary pohyb
- zostrojiť graf konštantnej závislosti rýchlosti od času pri rovnomernom priamočiarom pohybe
- zostrojiť graf priamej úmernosti medzi prúdom a napätím z nameraných hodnôt
- lineárna závislosť gravitačnej sily a hmotnosti telesa
- grafické znázornenie rýchlosti a dráhy pohybu v čase
- zostrojenie grafu závislosti elektrického prúdu od elektrického napätia

▪ Informatika:

- informácie v tabuľkách, bunka, vzťahy medzi bunkami, grafy

▪ Chémia:

- vyriešiť úlohy na výpočet hmotnostného zlomku, a koncentrácie látkového množstva zložky,
- roztriediť skupinu prvkov na prvky s malou a veľkou hodnotou elektronegativity na základe ich umiestnenia v PTP
- vypočítať hmotnosť reaktantu alebo produktu na základe chemickej rovnice, ak je daná hmotnosť tuhého produktu alebo reaktantu,
- určiť hodnotu reakčného tepla spätnej reakcie na základe hodnoty reakčného tepla priamej reakcie s využitím 1. termochemického zákona
- porovnať rýchlosť priebehu chemických reakcií na základe pozorovania
- vysvetliť podstatu vplyvu zmeny teploty, zmeny koncentrácie reaktantov a katalyzátora na rýchlosť chemickej reakcie,
- vysvetliť podstatu vplyvu pridania reaktantu alebo odobrania produktu, zmeny teploty a tlaku na rovnovážny stav sústavy

▪ Geografia:

- určiť polohu ľubovoľného miesta na mape pomocou geografických súradníc
- vyhľadať a interpretovať štatistické údaje, fakty a dôležité skutočnosti z dôveryhodných informačných zdrojov
- tvorivo využívať geografické poznatky v rôznych grafických podobách (obsah tematickej mapy, tabuľky, schémy, diagramy, kartogramy, kartodiagramy)
- porozumieť a adekvátne používať údaje prezentované v GPS prístrojoch a navigátoroch
- vypočítať skutočnú vzdialenosť miest na mape z číselnej alebo grafickej mierky
- správne interpretovať údaje o klimatických charakteristikách prezentované v rôznych grafických a textových podobách (tabuľky, schémy, grafy, klimatické diagramy, tematické mapy),
- poznať význam a spoľahlivosť meteorologických predpovedí,
- porovnať vplyv vnútorných a vonkajších geologických procesov na formovanie povrchu Zeme
- správne interpretovať informácie o vývoji a zložení obyvateľstva prezentované vo forme grafov, tabuliek, vekových pyramíd, diagramov a tematických máp,
- správne interpretovať štatistické údaje a ekonomické ukazovatele hospodárskej výkonnosti jednotlivých štátov sveta a jej regiónov
- správne interpretovať štatistické údaje a ekonomické ukazovatele hospodárskej výkonnosti jednotlivých regiónov, štátov
- správne interpretovať informácie o vývoji a zložení obyvateľstva regiónu prezentované vo forme grafov, tabuliek, vekových pyramíd, diagramov a tematických máp
- správne interpretovať informácie o vývoji a zložení obyvateľstva Slovenska, prezentované vo forme grafov, tabuliek, vekových pyramíd, diagramov a tematických máp
- odhadnúť vývoj a možné riziká zmien v kľúčových odvetviach priemyslu Slovenska,

▪ Fyzika:

- analýza graficky znázornenej závislosti dráhy od času (rovnomerné, nerovnomerné, spomalené a zrýchlené pohyby)
- interpretovať sklon grafu lineárnej závislosti a priesečníkov grafu s osami súradníc
- zobrazenie vykonanej práce v grafe závislosti sily od posunutia
- voľný pád – zostrojenie grafu závislosti dráhy od času, určenie závislosti rýchlosti od času
- závislosť pohybu elektrónov od teploty, závislosť elektrického odporu od teploty
- lineárna závislosť, graf lineárnej závislosti
- závislosť odporu kovového vodiča od teploty
- harmonický kmitavý pohyb (časovým diagramom kmitavého pohybu je sínusoida alebo kosínusoida)

▪ Informatika:

- analyzovať problém, navrhnúť algoritmus riešenia problému, zapísať algoritmus v zrozumiteľnej formálnej podobe, overiť správnosť algoritmu
- rozumieť hotovému programom, určiť vlastnosti vstupov, výstupov a vzťahy medzi nimi
- riešiť úlohy pomocou príkazov s rôznymi obmedzeniami použitia príkazov, premenných, typov a operácií
- vstup a výstup informácie v závislosti od jej typu
- tabuľkový kalkulátor – vzorec, funkcia
- vstupné a výstupné zariadenia
- problém, algoritmus, algoritmy z bežného života, spôsoby zápisu algoritmu
- programovací jazyk – príkazy (priradenie, vstup, výstup), premenné



This material is provided by the [FunThink Team](#).
Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under a Creative Commons License ([CC BY-SA 4.0](#)). Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Miskoncepce a ťažkosti s učením

Názov kurzu

Meno lektora

Číslo sekcie:

Intelektuálny výstup projektu FunThink (Erasmus+)

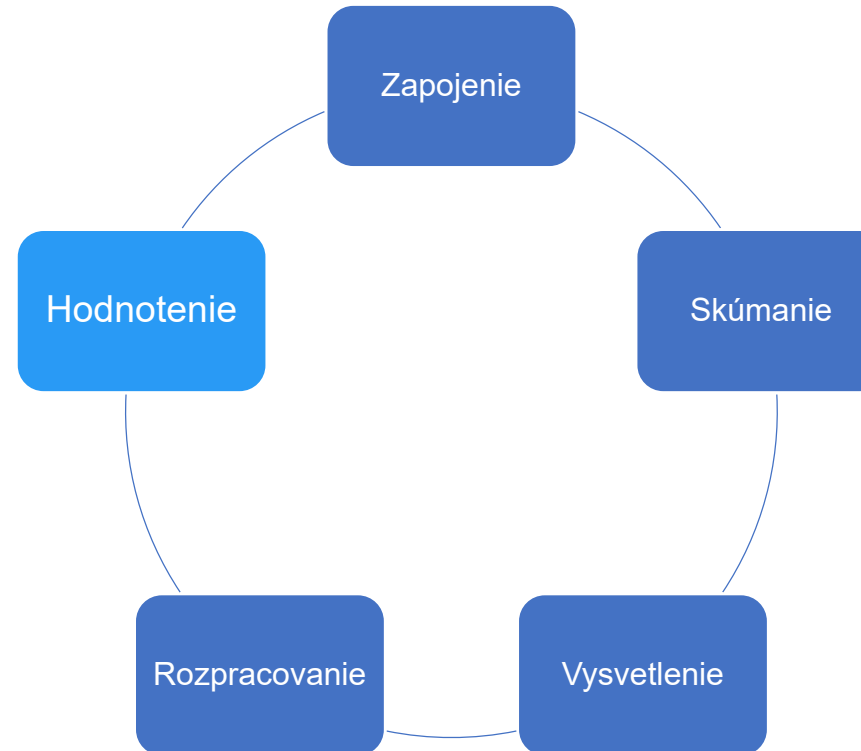
Brainstorming:
Čo Vám napadne, keď sa povie:

Hodnotenie

Kvôli čomu pri bádaní
potrebujeme stále hodnotiť?

To má učiteľ stále dávať
známky?

Bádateľský cyklus 5E



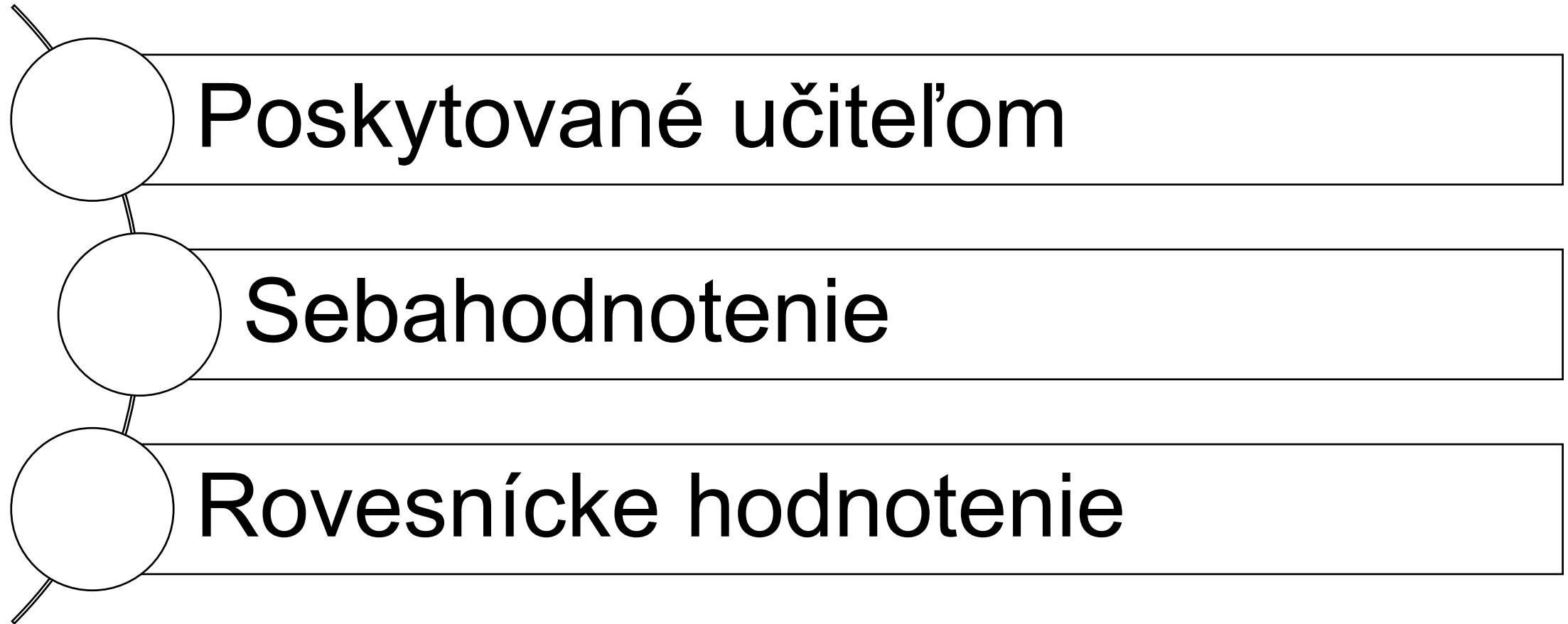
- Učiteľ dáva žiakovi informáciu, čo je cieľom vyučovania matematiky.
- Žiak informuje, ako tieto ciele napĺňa.
 - Komu je táto informácia priamo dostupná?
 - **Danému žiakovi: príležitosť k sebahodnoteniu**
 - **Inému žiakovi: príležitosť k rovesníckemu hodnoteniu**
 - **Učiteľovi**
 - Čo s touto informáciou robí učiteľ?
 - **Informuje žiaka, ako dopadol v porovnaní s normou / triedou – klasifikácia.**
 - **Informuje žiaka, ako sa môže ďalej učiť, resp. aký progres zaznamenal.**
 - **Prispôsobuje vyučovanie**

- Učiteľ dáva žiakovi informáciu, čo je cieľom vyučovania matematiky.
- Žiak informuje, ako tieto ciele napĺňa.
 - Komu je táto informácia priamo dostupná?
 - Danému žiakovi: príležitosť k sebahodnoteniu
 - Inému žiakovi: príležitosť k rovesníckemu hodnoteniu
 - Učiteľovi
 - Čo s touto informáciou robí učiteľ?

SUMATÍVNE

- **Informuje žiaka, ako dopadol v porovnaní s normou / triedou – klasifikácia.**
- **Informuje žiaka, ako sa môže ďalej učiť, resp. aký progres zaznamenal.**
- **Prispôsobuje vyučovanie**

- Učiteľ dáva žiakovi informáciu, čo je cieľom vyučovania matematiky.
- Žiak informuje, ako tieto ciele napĺňa.
 - Komu je táto informácia priamo dostupná?
 - Danému žiakovi: príležitosť k sebahodnoteniu
 - Inému žiakovi: príležitosť k rovesníckemu hodnoteniu
 - Učiteľovi
 - Čo s touto informáciou robí učiteľ?
 - Informuje žiaka, ako dopadol v porovnaní s normou / triedou – klasifikácia.
 - Informuje žiaka, ako sa môže ďalej učiť, resp. aký progres zaznamenal.
 - Prispôsobuje vyučovanie



Proximálne FH

„Tu a teraz“

- **Prítomné vo verbálnej komunikácii so žiakmi**
 - Kladenie otázok
 - Učiteľova reakcia na správnu odpoveď
 - Učiteľova reakcia na nesprávnu odpoveď
 - Učiteľova reakcia na podnet žiaka
- **Spontánne, ale dá sa na neho pripraviť**

Inštrumentalizované FH

„Vopred pripravený nástroj“

- **Sú prítomné konkrétne nástroje formatívneho hodnotenia**
 - Písomky bez známok
 - Jasná komunikácia cieľov (rubriky, kontrolný zoznam, ...)
 - Aktivita / hra
 - Vstupné zistenie porozumenia
 - ...
- **Pripravené vopred**

- Čo chceme formatívne hodnotiť?
- Je nástroj matematicky korektný?
- Aký má diagnostický potenciál?

Procedurálne poznatky

- **Načasovanie:**
 - Na začiatku resp. pred začatím celku:
 - Úroveň vstupných procedurálnych poznatkov (napr. pred konštrukčnými úlohami zistiť, ako sú na tom žiaci s rysovaním)
 - V priebehu roka:
 - Automatizácia niektorých postupov (napr. rýchle využívanie násobilky)
- **V akom prípade:**
 - Len to, čo má zmysel automatizovať
 - Len to, čo je už pochopené

Konceptuálne porozumenie

- **Načasovanie:**
 - Na začiatku celku:
 - Prekoncepty
 - Porozumenie vstupným vedomostiam
 - Pri bádani: nepriame poukázanie na poznatky, z ktorých môže žiak vychádzať
 - Na záver celku:
 - Úroveň porozumenia pojmu / metóde riešenia / ...
 - Možnosť overiť aj propedeutické ciele

Procedurálne poznatky

- Je nástroj matematicky korektný?
- Hodnotí procesy, ktoré je potrebné automatizovať?

Konceptuálne porozumenie

- Je nástroj matematicky korektný?

Procedurálne poznatky

- Umožňuje hodnotiť progres?
(čo sa týka rýchlosti alebo zložitosti)

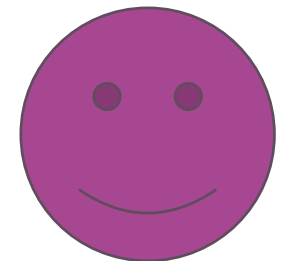
Rozhodnite, či ide o priamu úmernosť alebo o nepriamu úmernosť.

- Množstvo múky na 1 palacinku, na x palaciniiek.
- Čas cestovania v závislosti od rýchlosti.
- Množstvo spotrebovaného krmiva v závislosti od počtu zvierat.
- Množstvo zvyšného krmiva v závislosti od počtu dní.

Konceptuálne porozumenie

- Umožňuje odhalenie miskoncepcií?
- Dá sa ním zistiť, do akej hĺbky žiaci rozumejú pojmu, metóde riešenia?
- Umožňuje nástroj urobiť dobré rozhodnutie ohľadom „ďalšieho ťahu“?

Dnešná hodina bola:



Brainstorming: Čo konkrétne robí učiteľ, keď formatívne hodnotí?

Brainstorming:

Čo konkrétne robí učiteľ, keď formatívne hodnotí?

- **Pozoruje a identifikuje**
 - úrovne myslenia
 - pre-koncepty
 - miskoncepce
- **Zisťuje preferencie žiakov (napr. ktorá reprezentácia je im bližšia)**
- **Spoznáva, aký jazyk žiaci používajú**
- **Reaguje tak, aby podporil žiacke učenie**
 - prispôsobuje jazyk
 - pracuje so žiackou chybou
 - presúva zodpovednosť za správnosť na žiaka
- **Vytvára tlak na porozumenie u všetkých žiakov**
- ...

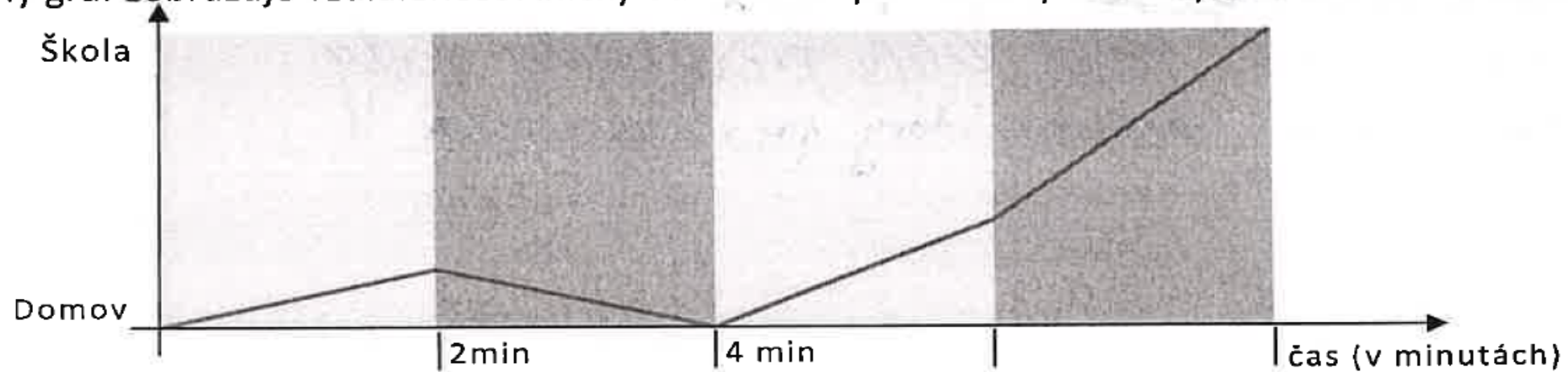
- **Ide o presunutie z roly „vševediaceho“ do roly „facilitátora“**

Analyzujte nasledovné žiacke riešenia

- **Skupinová práca**
 - Analyzujte nasledovné žiacke riešenia. Posúďte ich správnosť, identifikujte reprezentácie a prístupy k pojmu funkcia, ktoré žiak využil.

Žiacke riešenie 1

Uvedený graf zobrazuje vzdialenosť Aničky od domova počas cesty do školy.



Popíšte Aničkin pohyb v oblastiach ①, ②, ③ a ④. V každej oblasti popíšte, akou rýchlosťou a akým smerom Anička išla. Použite na to napríklad vyjadrenia ako: „išla pomaly“, „išla rýchlejšie ako“, „išla smerom k škole“,

vo fázy 1 išla rýchlejšie vo fázy 2 pomalšie
vo fázy 3 išla rýchlejšie a vo fázy 4 išla ešte
rýchlejšie

Máme nasledujúcu situáciu:

„Taxislužba účtuje základný poplatok vo výške 2,50 € a za každý prejdený kilometer 0,80 €.“

Ktorý z nasledujúcich predpisov správne opisuje situáciu? Napíšte, čo vyjadrujú premenné x a y .

$y = 2,5x + 0,8$ $y = 2,5x - 0,8$ $y = 0,8x + 2,5$ $y = -0,8x + 2,5$

Premenná x vyjadruje: základný poplatok 2,5 €

Premenná y vyjadruje: poplatok navyše 0,8 €

Žiacke riešenie 3

Máme nasledujúcu situáciu:

„Sviečka je na začiatku 24 cm vysoká a každú hodinu sa zmenší o 2 cm.“

Ktorý z nasledujúcich predpisov správne opisuje situáciu? Napíšte, čo vyjadrujú premenné x a y .

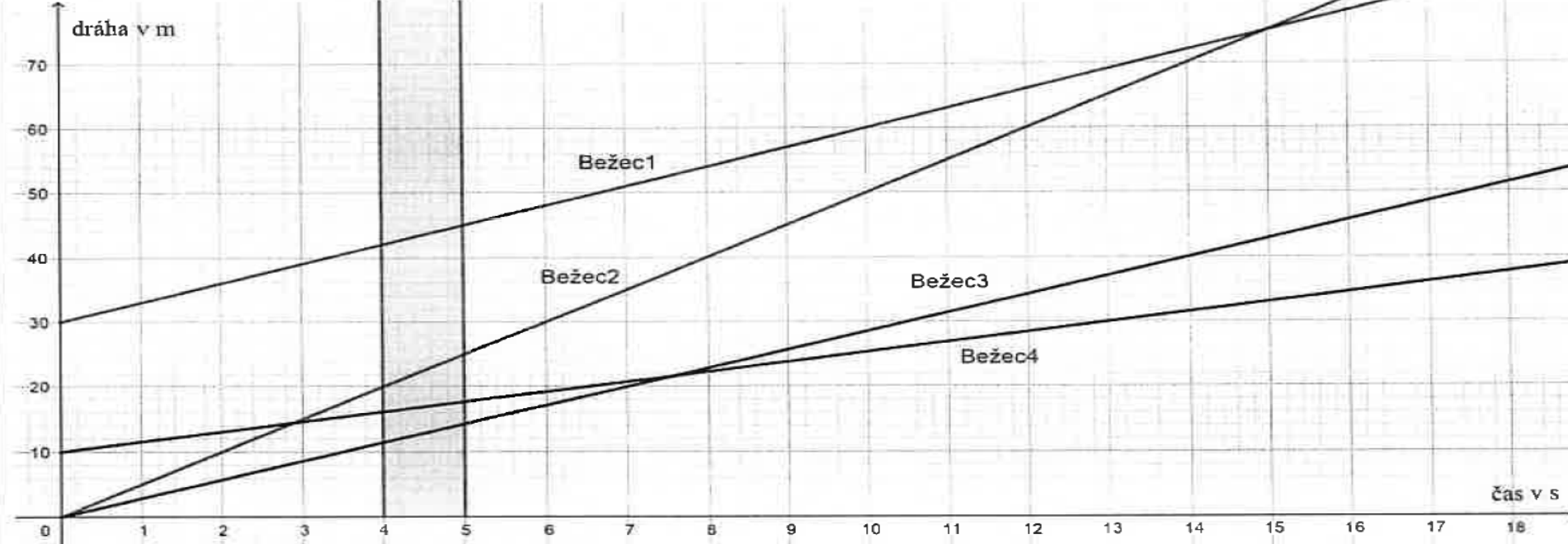
$y = 24x - 2$ $y = 2x + 24$ $y = -24x + 2$ $y = -2x + 24$

Premenná x vyjadruje: ~~hodiny~~ hodiny

Premenná y vyjadruje: stav sviečky

Žiacke riešenie 4

Ktorý z bežcov je najrýchlejší v čase $t = 4$ až $t = 5$ sekúnd?



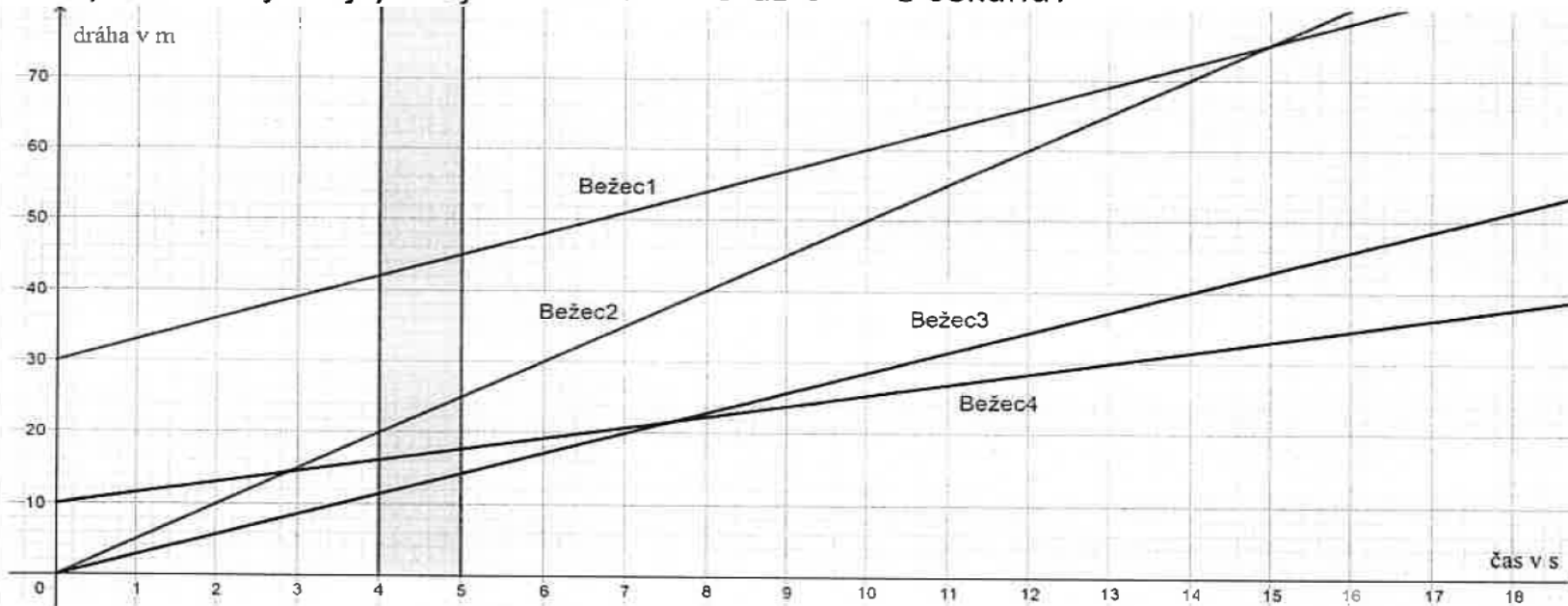
- Bežec 1 Bežec 2 Bežec 3 Bežec 4

Zdôvodnite svoju odpoveď:

Čiarke je nakreslená vyššie. Akože viac do hore.

Žiacke riešenie 5

Ktorý z bežcov je najrýchlejší v čase $t = 4$ až $t = 5$ sekúnd?



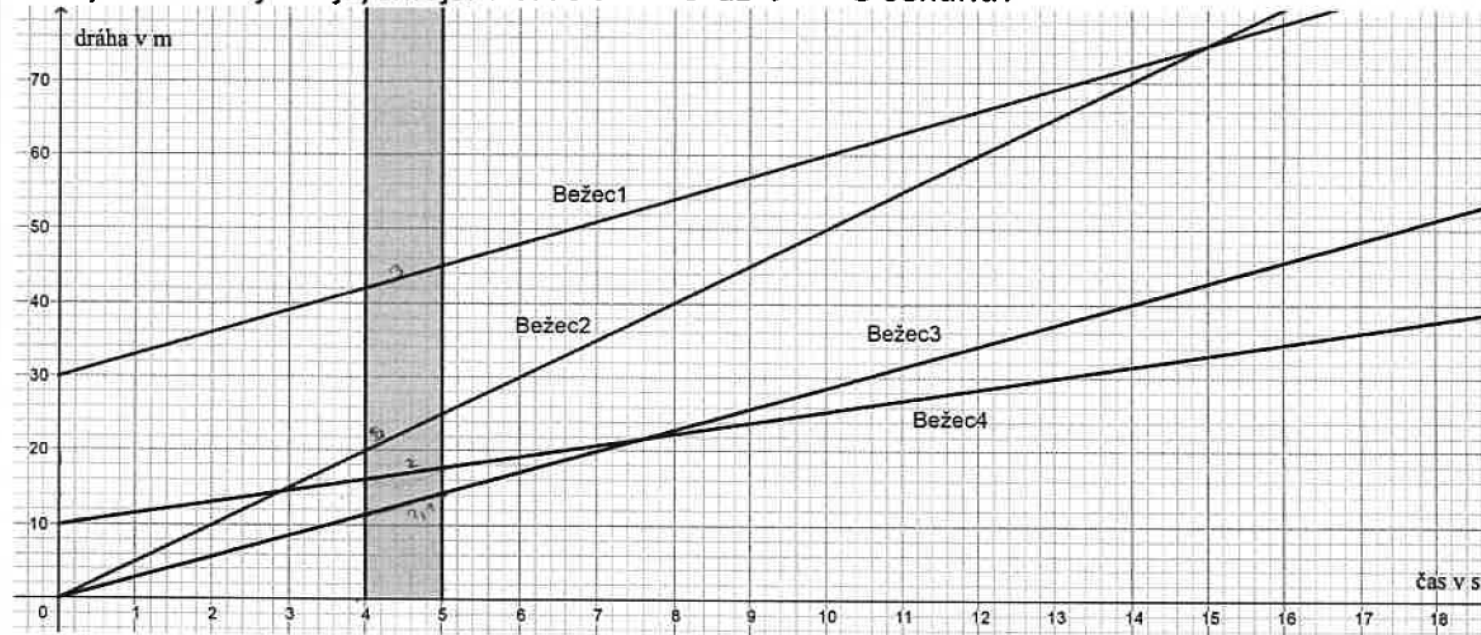
Bežec 1 Bežec 2 Bežec 3 Bežec 4

Zdôvodnite svoju odpoveď:

lebo je najokrežite

Žiacke riešenie 6

Ktorý z bežcov je najrýchlejší v čase $t = 4$ až $t = 5$ sekúnd?

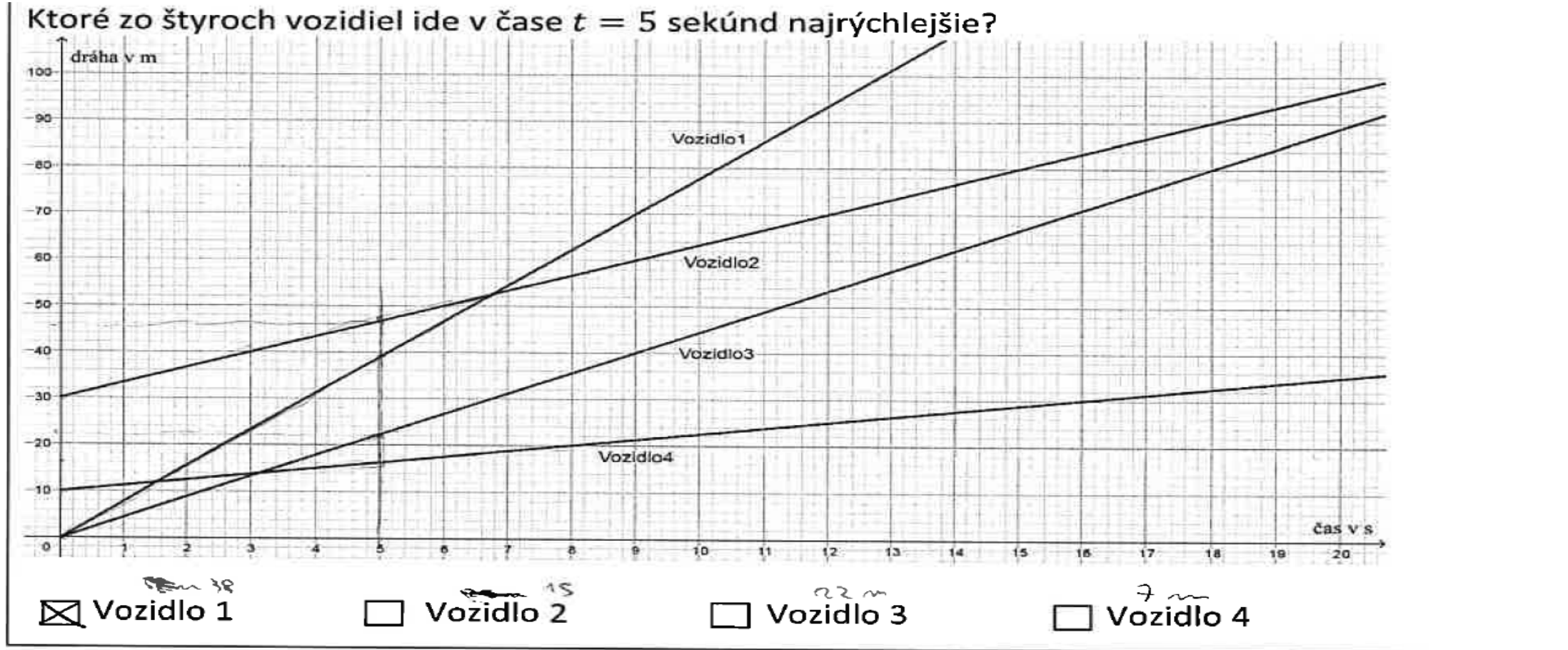


- Bežec 1 Bežec 2 Bežec 3 Bežec 4

Zdôvodnite svoju odpoveď:

pretože na "1 s" prešiel najväčšiu dráhu.

Žiacke riešenie 7



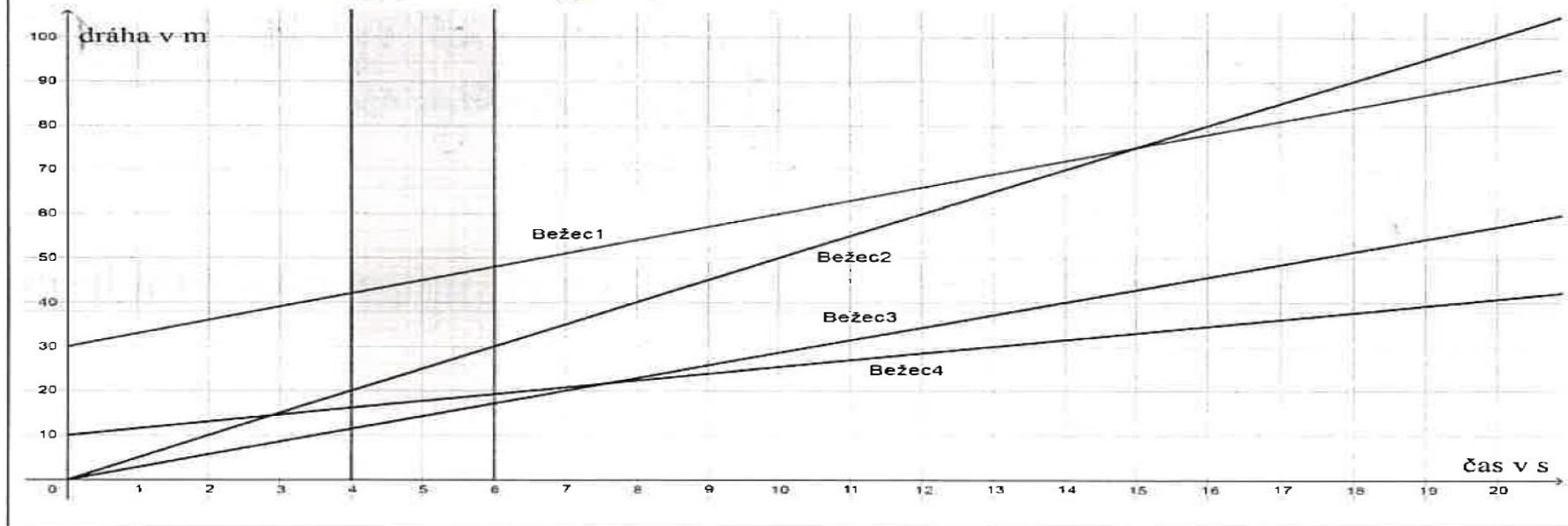
Žiacke riešenie 8

a) Koľko metrov zabehne Bežec 2 v časovom rozmedzí $t = 4$ s až $t = 6$ s?

Odpoveď: v čase $t=4$ bežec 2 zabehne zhruba 25m a v čase $t=6=30m$

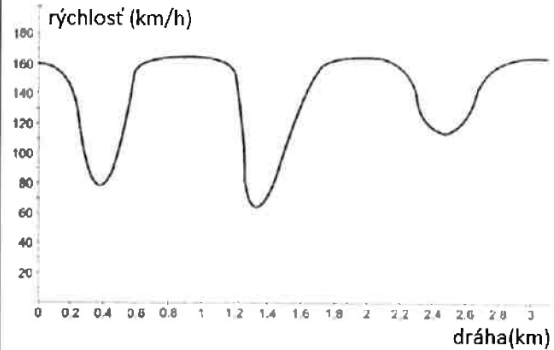
b) Kedy je Bežec 1 rýchlejší ako Bežec 2?

Odpoveď: Bežec 1 je rýchlejší od času $t=1s$ až $t=15s$

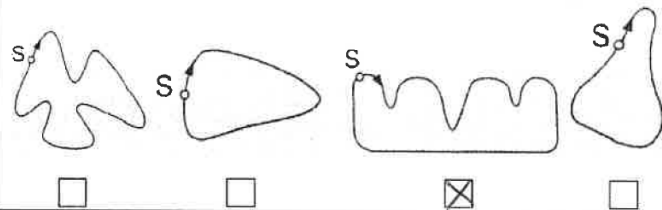


Žiacke riešenie 9-12

Tento graf znázorňuje, ako sa mení rýchlosť pretekárskeho auta na dlhom rovinatom pretekárskom okruhu počas druhého kola pretekov.



Nasledujúce obrázky sú načrtmi štyroch pretekárskych okruhov. Na ktorom z týchto okruhov jazdilo pretekárske auto, ktorého graf rýchlosti je načrtnutý vyššie?



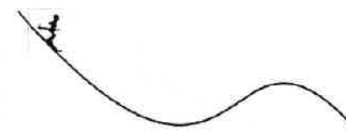
Do vázy na kvety, ktorá je znázornená na obrázku, napúšťame vodu rovnomerným prítokom vody. Načrtnite graf funkcie, ktorá vyjadruje výšku hladiny vody vo váze v závislosti od času.



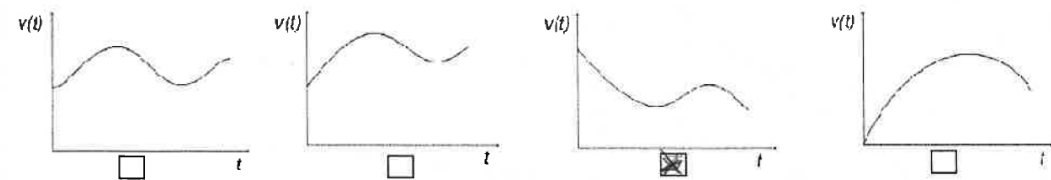
Do vázy na kvety, ktorá je znázornená na obrázku, napúšťame vodu rovnomerným prítokom vody. Načrtnite graf funkcie, ktorá vyjadruje výšku hladiny vody vo váze v závislosti od času.



Nasledujúci obrázok znázorňuje lyžiara jazdiaceho po svahu. Hodnota funkcie $v(t)$ udáva jeho okamžitú rýchlosť v čase t .



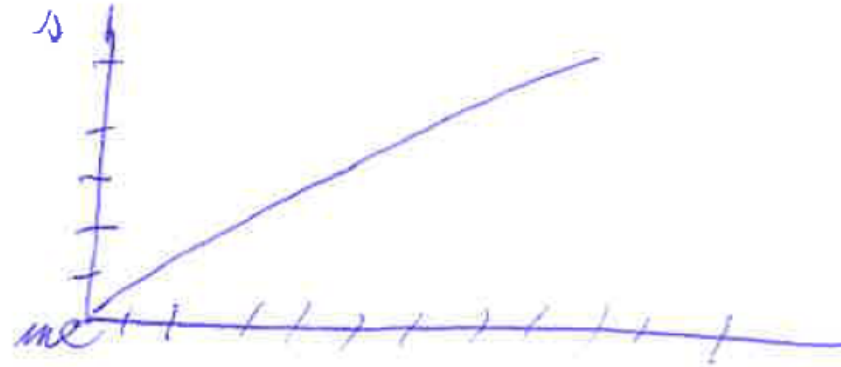
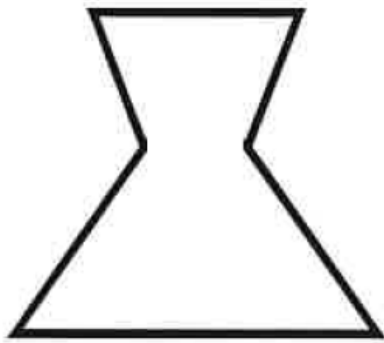
Ktorý z grafov najlepšie opisuje uvedenú situáciu?



Vysvetli svoju odpoveď:

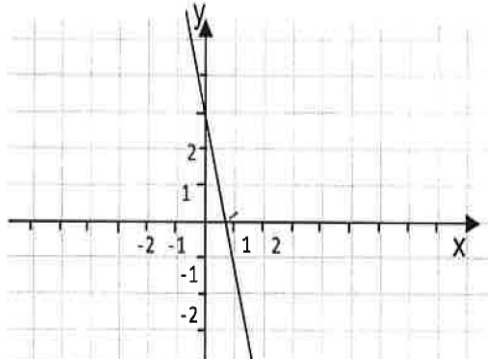
Žiacke riešenie 13

Do vázy na kvety, ktorá je znázornená na obrázku, napúšťame vodu rovnomerným prítokom vody. Načrtnite graf funkcie, ktorá vyjadruje výšku hladiny vody vo váze v závislosti od času.



Žiacke riešenie 14-16

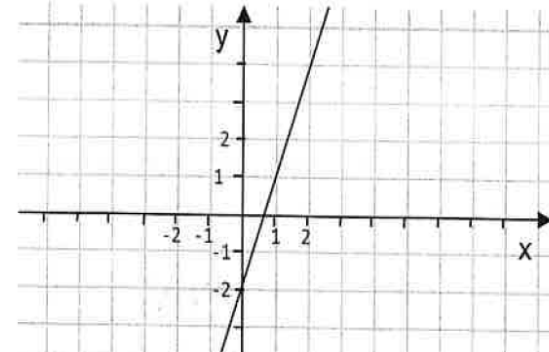
Daný je graf funkcie f a štyri predpisy.



Ktorý predpis zodpovedá grafu funkcie f ?

- $y = -4x + 3$
- $y = 3x + 0,75$
- ✗ $y = 0,75x + 3$
- $y = 3x - 4$

Daný je graf funkcie:



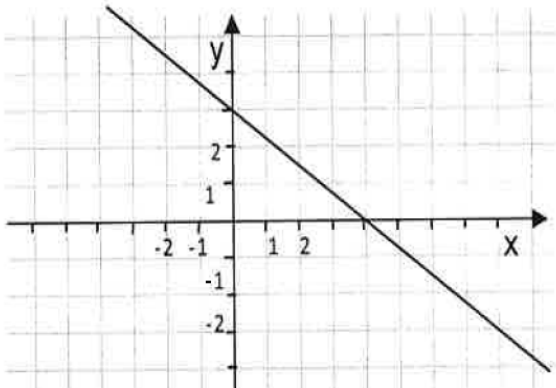
Zapište predpis funkcie zodpovedajúcej grafu.

$$y = -2x + 0,4$$

Stručne vysvetlite, ako ste postupovali.

podľa súradníc

Daný je graf funkcie f :



Zapište predpis funkcie zodpovedajúcej grafu.

$$y = 4x + 3$$

Stručne vysvetlite, ako ste postupovali.

$y = [0; 3]$ $x = [0; 4]$
podľa súradníc

Brainstorming:

Aké miskoncepce môžu žiaci mať v téme funkcie?

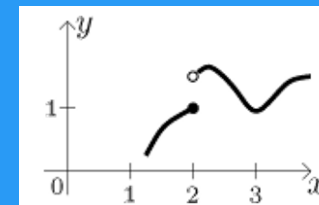
- **Chyba vs. Miskoncepčia**
 - Miskoncepčia - chybná predstava o nejakom pojme, vlastnosti
 - Chyba - nesprávne riešenie, odpoveď z akýchkoľvek dôvodov - nepozornosť, iné porozumenie úlohy, miskoncepčia
- **V malých skupinách napíšte čo najdlhší zoznam miskoncepcií, s ktorými sa môžeme stretnúť špecificky pri vyučovaní funkcií.**

1. Čo je a čo nie je funkcia?

- nepresné predstavy o tom, ako by mali grafy funkcií vyzerat' (ako grafy funkcií sa chápu len grafy, ktoré vykazujú zjavný alebo jednoduchý vzor)
- predstava, že len grafy, kde je badať nejaký vzor, predstavujú funkcie; ostatné vyzerajú zvláštne, umelo alebo neprirodzene.
- myšlienky, že nasledujúce funkcie nie sú funkciami:
funkcie zložené z ľubovoľnej korešpondencie, funkcie dané viac ako jedným pravidlom a funkcie, ktoré matematici oficiálne neuznávajú a neoznačujú ako funkcie
- myšlienky, že funkcie musia pozostávať z veličín, ktoré sú premenlivé
- myšlienky, že funkcia znamená kauzalitu
- presvedčenie, že funkcie sú vždy prosté, chaos medzi priradením „jedného viacerým“ a „viacerých jednému“

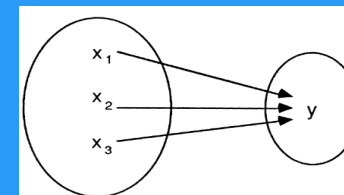
Príklad:

Graf nepredstavuje funkciu, pretože nevykazuje zjavný vzor, pravidelnosť.



Príklad:

Toto nie je funkcia, lebo viacero x je smeruje k jednému y .



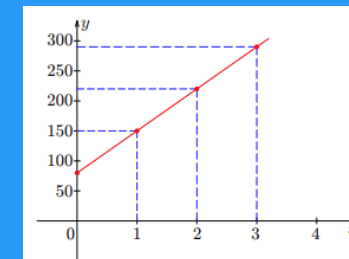
Miskoncepce, chyby a problémy pri vyučovaní funkcií

2. Linearita

- tendencia definovať funkciu ako vzťah, ktorý pri grafickom znázornení vytvára lineárny vzor
- tendencia spájať každé dva po sebe idúce body priamkou (v kontextuálnych aj abstraktných situáciách)
- len jedna funkcia môže prechádzať dvoma danými bodmi (zovšeobecnenie špeciálnej vlastnosti lineárnych funkcií)
- prílišné zovšeobecnenie vlastností lineárnych funkcií na iné typy funkcií

Príklad:

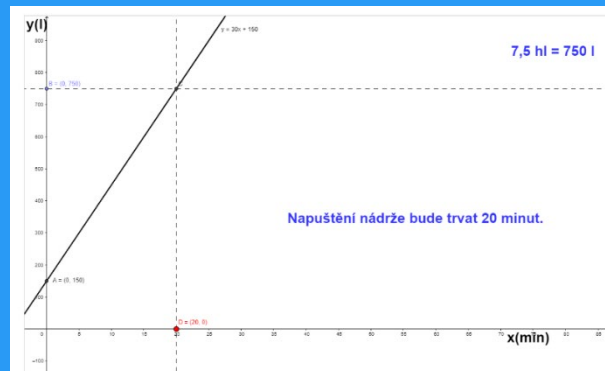
Alex si kúpil nové auto s počítadlom kilometrov 80 km. To sa však čoskoro zmení, pretože zajtra sa chystá na väčšiu cestu. Opíšte, ako (tabuľka, graf, rovnica), ak je jeho priemerná rýchlosť 70 km za hodinu.



3. Definičný obor a obor hodnôt

- zámena oboru hodnôt a definičného oboru
- neporozumenie, akým spôsobom definičný obor ovplyvňuje obor hodnôt
- ignorovanie definičného oboru pri kontextuálnych úlohách

Príklad:

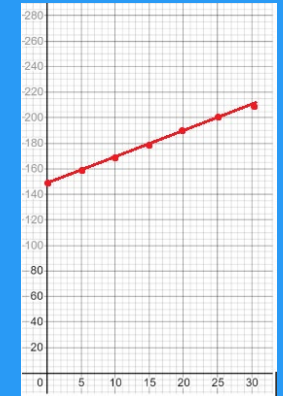


4. Problémy súvisiace s grafickou reprezentáciou a súradnicovou sústavou

- reprezentácia alebo interpretácia spojitych údajov diskretným spôsobom resp. opačne
- zámena intervalu a bodu
- zámena sklonu a výšky
- graf ako obrázok
- ťažkosti s nastavením dvoch osí pre karteziánsky súradnicový systém
- problémy s mierkou
- vplyv zmeny mierky osí na vzhľad grafu
- zámena dvoch osí grafu
- nepochopenie významu bodov v rovnakej polohe vzhľadom na jednu z osí
- body na grafe zostávajú v rovnakej polohe, aj keď sa menia osi
- grafy vždy prechádzajú počiatkom (alebo začínajú v ňom)
- najväčšie čísla označené na osiach predstavujú najväčšie dosiahnuté hodnoty

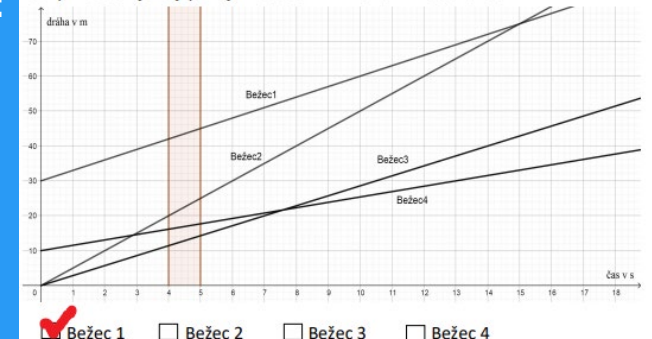
Príklad:

Graficky znázorníte závislosť objemu v odmerke od počtu guľôčok.



Príklad:

Ktorý z bežcov je najrýchlejší v čase $t = 4$ až $t = 5$ sekúnd?



5. Problémy súvisiace s predpisom a premennou

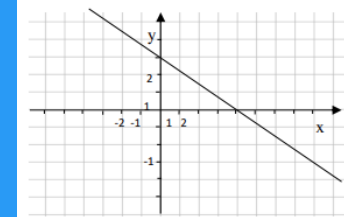
- neporozumenie rozdielu medzi koeficientmi a premennými (viditeľné pri dosadzovaní súradníc bodov do všeobecného tvaru danej funkcie)
- algebraické problémy pri úprave predpisu
- zmena symbolu premennej vo funkčnej rovnici zmení niektoré kritické aspekty funkcie
- neporozumenie významu koeficientov (napr. smernice)
- pri lineárnej funkcii:
 - priesečníky ako koeficienty
 - poradie hodnôt v slovnom opise ovplyvňuje poradie koeficientov v predpise
 - zámena koeficientov k a q

Príklad:

Taxislužba účtuje základný poplatok vo výške 2,50 € a za každý prejdený kilometer 0,80 €.

$$y = 2,5x + 0,8$$

Príklad: Daný je graf funkcie:



$$y = 4x + 3$$

6. Neporozumenie jednotlivým aspektom funkcie

- **Vstup výstup**
 - Napr. problémy pri vypĺňaní tabuľky a čítaní údajov z nej
- **Kovariancia**
 - Napr. ignorovanie kovariančných vlastností jednotlivých funkcií
- **Korešpondencia**
 - Napr. neschopnosť zovšeobecniť vzťah pomocou predpisu
- **Objekt**
 - Napr. problémy s porozumením vlastností funkcií
 - Napr. neidentifikovanie typu funkcie na základe jej predpisu, ak ten nie je v základnom tvare