

Πλάνο Πρώτης Συνάντησης

Εισαγωγή στον Συναρτησιακό Λογισμό – Πτυχές των συναρτήσεων – Συναρτησιακός λογισμός στο Δημοτικό Σχολείο	
Διδακτικός Χρόνος:	120 λεπτά
Άτομα στα οποία απευθύνονται:	Προ-υπηρεσιακοί και εν-ενεργεία εκπαιδευτικοί
Σημαντικοί Σύνδεσμοι	
Περιβάλλον εκμάθησης:	<ul style="list-style-type: none"> https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/58797d35d81a612605304b1f?collections=featured-collections%2C5da6476150c0c36a0caf8ffb https://www.geogebra.org/m/krebtbds
Περιγραφή	
Στόχοι:	<ul style="list-style-type: none"> Να αναγνωρίζουν τις διαφορετικές πτυχές του συναρτησιακού λογισμού Να εντοπίζουν και να δημιουργούν περιβάλλοντα μάθησης για την ανάπτυξη του συναρτησιακού λογισμού στο δημοτικό σχολείο
Δομή Συνάντησης:	<ul style="list-style-type: none"> Εισαγωγή στον Συναρτησιακό Λογισμό. Κατασκευή γραφικών παραστάσεων με βάση δοσμένο βίντεο Χρήση της εφαρμογής «Όγκος Νερού» για την κατασκευή γραφικών παραστάσεων Συζήτηση για το πως παρουσιάζεται ο συναρτησιακός λογισμός στα βιβλία των μαθηματικών των σχολείων της Κύπρου

Το υλικό αυτό παρέχεται από την ομάδα [FunThink Team](#), Υπεύθυνο Ίδρυμα: Ομάδα Διδακτικής των Μαθηματικών – Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Μάριος Πιπτάλης (pittalis.marios@ucy.ac.cy)
Ελένη Δημοσθένους (demosthenous.eleni@ucy.ac.cy)
Ελένη Οδυσσεύς (odysseos.o.eleni@ucy.ac.cy)
Σωτήρης Λοιζιάς (loizias.soteris@gmail.com)



Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under a Creative Commons License ([CC BY-SA 4.0](#)). Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

Η υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής στην παραγωγή της παρούσας έκδοσης δεν συνιστά αποδοχή του περιεχομένου, το οποίο αντικατοπτρίζει αποκλειστικά τις απόψεις των συντακτών, και η Επιτροπή δεν μπορεί να αναλάβει την ευθύνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Δραστηριότητες

Εισαγωγή – Δραστηριότητα 1. (20 λεπτά)

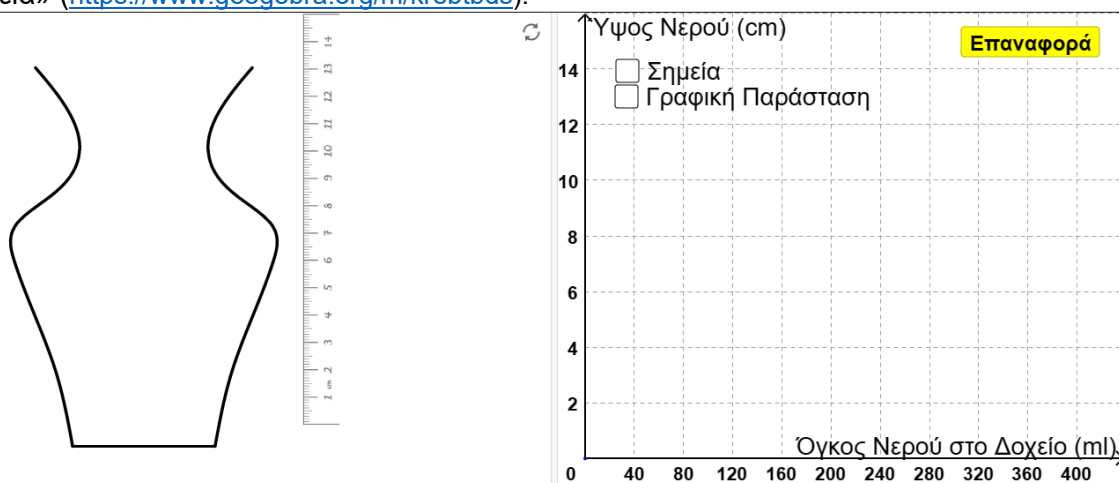
Οι εκπαιδευτικοί παρακολουθούν ένα βίντεο, στο οποίο παρουσιάζεται ένα σενάριο πραγματικής ζωής που εισάγει την έννοια της συμμεταβολής των δύο ποσοτήτων, μέσω της ιστοσελίδας Desmos (Graphing stories) (<https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/58797d35d81a612605304b1f?collections=featured-collections%2C5da6476150c0c36a0caf8ffb>).

Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να:

- Αναγνωρίσουν τις μεταβλητές του συγκεκριμένου σεναρίου
- Προτείνουν πιθανές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών.
- Κατασκευάσουν μια γραφική παράσταση της απόστασης της κίνησης του ατόμου, όπως παρουσιάζεται στο βίντεο
- Σχολιάσουν το σχήμα της γραφικής παράστασης

Εισαγωγή – Δραστηριότητα 2. (20 λεπτά)

Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να εργαστούν χρησιμοποιώντας το ψηφιακό εργαλείο «Γεμίζοντας τα δοχεία» (<https://www.geogebra.org/m/krebtbds>).



Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να:

- Φτιάξουν το σχήμα ενός βάζου, βασισμένοι στη δοσμένη γραφική παράσταση.
- Θέσουν πιθανές ερωτήσεις, βασισμένες στο δοσμένο σενάριο, οι οποίες να είναι κατάλληλες για τους μαθητές
- Συγκρίνουν τις ερωτήσεις τους με βάση τις διαδικασίες, το περιεχόμενο και τη γνωστική απαίτηση
- Σκιαγραφήσουν το σχήμα ενός βάζου με βάση τη γραφική παράσταση

Παρουσίαση (20 λεπτά)

Στη συνέχεια, ο εκπαιδευτής πραγματοποιείται μια παρουσίαση (Παρουσίαση 1) για την εισαγωγή των εκπαιδευτικών στην έννοια του συναρτησιακού λογισμού και σε συγκεκριμένους τομείς όπως:

1. Σημασία συναρτησιακού λογισμού
2. Ορισμός συναρτησιακού λογισμού
3. Πτυχές της συνάρτησης
4. Η συνάρτηση ως μαθηματικό αντικείμενο
5. Περιγραφή συναρτησιακού λογισμού
 - α. Για μαθητές Δημοτικού
 - β. Για μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου
6. Συναρτησιακός λογισμός και αλγεβρική σκέψη

Συζήτηση στην ολομέλεια (30 λεπτά)

Στο σημείο αυτό, παρουσιάζονται στους εκπαιδευτικούς δραστηριότητες από τα σχολικά εγχειρίδια των μαθηματικών, τις οποίες καλούνται να μελετήσουν και να συζητήσουν για να προσδιορίσουν ποιες πτυχές της έννοιας της συνάρτησης εμπλέκονται στις παρακάτω δραστηριότητες.

Διερεύνηση Μαθήματα 8, 9 και 10

(α) Ο πίνακας παρουσιάζει τις τιμές εισόδου και εξόδου μιας αριθμητικής.

Είσοδος	Εξόδος
1	5
2	7
3	8
4	9
5	10

(β) Να περιγράψεις λέκτικά τον κανόνα που ακολουθεί η μηχανή.

(γ) Να εκφράσεις τον αριθμό που θα εμφανιστεί στην έξοδο της μηχανής, αν στην είσοδο τοποθετηθεί ο αριθμός κ.

(δ) Η μη κλίμα μηχανή ακολουθεί έναν διαφορετικό κανόνα.

Είσοδος	Εξόδος
2	5
5	11
7	15
9	19
12	25

(ε) Να περιγράψεις λέκτικά τον κανόνα που ακολουθεί η μηχανή.

(ς) Να εκφράσεις τον αριθμό που θα εμφανιστεί στην έξοδο της μηχανής, αν στην είσοδο τοποθετηθεί ο αριθμός κ.

Δραστηριότητες

1. (α) Να αποτυπώσεις κάθε πίνακα με τον κανόνα που ακολουθεί.

Πίνακας Α	Πίνακας Β	Πίνακας Γ
Είσοδος 3 18 4 25 10 25 9 25 42 27	Εξόδος 2 12 4 26 8 26 7 15 11 28	Είσοδος 1 9 2 7 3 15 4 21 25 41

(β) Αναπαράστητε τον αριθμό που εμφανίζεται στην έξοδο της μηχανής, αν στην είσοδο τοποθετηθεί ο αριθμός κ.

Πίνακας Α: _____ Πίνακας Β: _____ Πίνακας Γ: _____

ΕΞΕΤΑΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

4. Ένα απίστευτο λάθος τριώνισμα προσέχει! Για καλό ή κακό σου τον 4 μήνα, τα τριώνισμα σου είναι τα κάτω.

1 τριώνισμα	2 τριώνισμα	3 τριώνισμα
1	2	3
2	3	4
3	4	5
4	5	6
5	6	7
6	7	8
7	8	9
8	9	10
9	10	11
10	11	12
11	12	13
12	13	14
13	14	15
14	15	16
15	16	17
16	17	18
17	18	19
18	19	20
19	20	21
20	21	22
21	22	23
22	23	24
23	24	25
24	25	26
25	26	27
26	27	28
27	28	29
28	29	30
29	30	31
30	31	32
31	32	33
32	33	34
33	34	35
34	35	36
35	36	37
36	37	38
37	38	39
38	39	40
39	40	41
40	41	42
41	42	43
42	43	44
43	44	45
44	45	46
45	46	47
46	47	48
47	48	49
48	49	50
49	50	51
50	51	52
51	52	53
52	53	54
53	54	55
54	55	56
55	56	57
56	57	58
57	58	59
58	59	60
59	60	61
60	61	62
61	62	63
62	63	64
63	64	65
64	65	66
65	66	67
66	67	68
67	68	69
68	69	70
69	70	71
70	71	72
71	72	73
72	73	74
73	74	75
74	75	76
75	76	77
76	77	78
77	78	79
78	79	80
79	80	81
80	81	82
81	82	83
82	83	84
83	84	85
84	85	86
85	86	87
86	87	88
87	88	89
88	89	90
89	90	91
90	91	92
91	92	93
92	93	94
93	94	95
94	95	96
95	96	97
96	97	98
97	98	99
98	99	100

(ε) Να αποτυπώσεις τον πίνακα με βάση τα πιο πάνω μετρή.

(ς) Να εκφράσεις λέκτικά τον κανόνα που ακολουθεί κάθε μηχανή, ώστε από τον αριθμό κ να προκύψει ο αριθμός κ.

2. Ο Αντώνης και η Θάλαρα χρημάτησαν το ίδιο μετρητή με διαφορετικό τρόπο, όπως παρουσιάζονται πιο κάτω.

Θάλαρα

Σχιστό 1	Σχιστό 2	Σχιστό 3	Σχιστό 4
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6
4	5	6	7
5	6	7	8
6	7	8	9
7	8	9	10
8	9	10	11
9	10	11	12
10	11	12	13
11	12	13	14
12	13	14	15
13	14	15	16
14	15	16	17
15	16	17	18
16	17	18	19
17	18	19	20
18	19	20	21
19	20	21	22
20	21	22	23
21	22	23	24
22	23	24	25
23	24	25	26
24	25	26	27
25	26	27	28
26	27	28	29
27	28	29	30
28	29	30	31
29	30	31	32
30	31	32	33
31	32	33	34
32	33	34	35
33	34	35	36
34	35	36	37
35	36	37	38
36	37	38	39
37	38	39	40
38	39	40	41
39	40	41	42
40	41	42	43
41	42	43	44
42	43	44	45
43	44	45	46
44	45	46	47
45	46	47	48
46	47	48	49
47	48	49	50
48	49	50	51
49	50	51	52
50	51	52	53
51	52	53	54
52	53	54	55
53	54	55	56
54	55	56	57
55	56	57	58
56	57	58	59
57	58	59	60
58	59	60	61
59	60	61	62
60	61	62	63
61	62	63	64
62	63	64	65
63	64	65	66
64	65	66	67
65	66	67	68
66	67	68	69
67	68	69	70
68	69	70	71
69	70	71	72
70	71	72	73
71	72	73	74
72	73	74	75
73	74	75	76
74	75	76	77
75	76	77	78
76	77	78	79
77	78	79	80
78	79	80	81
79	80	81	82
80	81	82	83
81	82	83	84
82	83	84	85
83	84	85	86
84	85	86	87
85	86	87	88
86	87	88	89
87	88	89	90
88	89	90	91
89	90	91	92
90	91	92	93
91	92	93	94
92	93	94	95
93	94	95	96
94	95	96	97
95	96	97	98
96	97	98	99
97	98	99	100

Αντώνης

(α) Να εκφράσεις με λίγα λόγια τον κανόνα που χρησιμοποίησε κάθε παιδί, για να χρηματίσει το μετρητή.

Θάλαρα: _____

Αντώνης: _____

(β) Τίποτα μετρητή και πίσω πρόβατα τετραπόδια θα έχει το 20ο σχιστό στο μετρητή κάθε παιδί.

4. Κάθε μια από τις πιο κάτω μηχανές ακολουθεί διαφορετικό τρόπο.

Είσοδος	Εξόδος	Είσοδος	Εξόδος	Είσοδος	Εξόδος
1	2	1	2	1	2
2	3	2	3	2	3
3	4	3	4	3	4
4	5	4	5	4	5
5	6	5	6	5	6
6	7	6	7	6	7
7	8	7	8	7	8
8	9	8	9	8	9
9	10	9	10	9	10
10	11	10	11	10	11
11	12	11	12	11	12
12	13	12	13	12	13
13	14	13	14	13	14
14	15	14	15	14	15
15	16	15	16	15	16
16	17	16	17	16	17
17	18	17	18	17	18
18	19	18	19	18	19
19	20	19	20	19	20
20	21	20	21	20	21
21	22	21	22	21	22
22	23	22	23	22	23
23	24	23	24	23	24
24	25	24	25	24	25
25	26	25	26	25	26
26	27	26	27	26	27
27	28	27	28	27	28
28	29	28	29	28	29
29	30	29	30	29	30
30	31	30	31	30	31
31	32	31	32	31	32
32	33	32	33	32	33
33	34	33	34	33	34
34	35	34	35	34	35
35	36	35	36	35	36
36	37	36	37	36	37
37	38	37	38	37	38
38	39	38	39	38	39
39	40	39	40	39	40
40	41	40	41	40	41
41	42	41	42	41	42
42	43	42	43	42	43
43	44	43	44	43	44
44	45	44	45	44	45
45	46	45	46	45	46
46	47	46	47	46	47
47	48	47	48	47	48
48	49	48	49	48	49
49	50	49	50	49	50
50	51	50	51	50	51
51	52	51	52	51	52
52	53	52	53	52	53
53	54	53	54	53	54
54	55	54	55	54	55
55	56	55	56	55	56
56	57	56	57	56	57
57	58	57	58	57	58
58	59	58	59	58	59
59	60	59	60	59	60
60	61	60	61	60	61
61	62	61	62	61	62
62	63	62	63	62	63
63	64	63	64	63	64
64	65	64	65	64	65
65	66	65	66	65	66
66	67	66	67	66	67
67	68	67	68	67	68
68	69	68	69	68	69
69	70	69	70	69	70
70	71	70	71	70	71
71	72	71	72	71	72
72	73	72	73	72	73
73	74	73	74	73	74
74	75	74	75	74	75
75	76	75	76	75	76
76	77	76	77	76	77
77	78	77	78	77	78
78	79	78	79	78	79
79	80	79	80	79	80
80	81	80	81	80	81
81	82	81	82	81	82
82	83	82	83	82	83
83	84	83	84	83	84
84	85	84	85	84	85
85	86	85	86	85	86
86	87	86	87	86	87
87	88	87	88	87	88
88	89	88	89	88	89
89	90	89	90	89	90
90	91	90	91	90	91
91	92	91	92	91	92
92	93	92	93	92	93
93	94	93	94	93	94
94	95	94	95	94	95
95	96	95	96	95	96
96	97	96	97	96	97
97	98	97	98	97	98
98	99	98	99	98	99
99	100	99	100	99	100

- Η μηχανή Α ακολουθεί τον αριθμό εισόδου επί 3.
 - Η μηχανή Β προσθέτει στον αριθμό εισόδου το 2.
 - Η μηχανή Γ αφαιρεί από τον αριθμό εισόδου το 2.
 Με την κατά τη σειρά να χρησιμοπονηθούν οι μηχανές, όπως από τον αριθμό 5 να προκύψει ο αριθμός 96.

Συζήτηση – Ιδεοθύελλα στην ολομέλεια (20 λεπτά)

Οι εκπαιδευ

Πλάνο Δεύτερης Συνάντησης

Έννοια Συναρτήσεων ως σχέσεις Εισόδου-Εξόδου και Αντιστοίχισης

Διδακτικός Χρόνος:	120 λεπτά
Άτομα στα οποία απευθύνονται:	Προ-υπηρεσιακοί και εν-ενεργεία εκπαιδευτικοί
Σημαντικοί Σύνδεσμοι	
Περιβάλλον εκμάθησης:	<ul style="list-style-type: none"> https://gizmos.explorellearning.com/index.cfm?method=cResource.dspView&ResourceID=1035 https://www.geogebra.org/m/e4zuj5ss#material/sxq5yzyk https://www.geogebra.org/m/vsgqkkz3 https://www.geogebra.org/m/m7bn4s9j https://app.dwo.nl/embod/?locale=en&profile=108&hash=%23s%3A703843#s:703843
Περιγραφή	
Στόχοι:	<ul style="list-style-type: none"> Να εντοπίζουν τις ποσότητες που μεταβάλλονται Να διατυπώνουν μαθησιακές ευκαιρίες για εμπλοκή των μαθητών με την έννοια της συνάρτησης ως σχέση εισόδου-εξόδου και αντιστοίχισης Να διατυπώνουν τον κανόνα αντιστοίχισης μεταξύ των μεταβαλλόμενων ποσοτήτων Να ερμηνεύουν τις αναπαραστάσεις των συναρτήσεων και να δημιουργούν συνδέσεις μεταξύ αναπαραστάσεων (κίνηση, γραμμή αριθμών, πίνακες)
Δομή Συνάντησης:	<ul style="list-style-type: none"> Πρόκληση Ενδιαφέροντος «Περπατώντας στην αριθμητική γραμμή» Πρόκληση Ενδιαφέροντος «Μαντέψτε τα γενέθλια μου» Εξερεύνηση του εφαρμογίδιου «Function Machines» Εξερεύνηση δραστηριοτήτων μέσω της εφαρμογής GeoGebra Εργασία με το εφαρμογίδιο «nomogram» Κατασκευή ρεαλιστικού σεναρίου για δοσμένη γραφική παράσταση

Το υλικό αυτό παρέχεται από την ομάδα [FunThink Team](#), Υπεύθυνο Ίδρυμα: Ομάδα Διδακτικής των Μαθηματικών – Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Μάριος Πιπτάλης (pittalis.marios@ucy.ac.cy)
Ελένη Δημοσθένους (demosthenous.eleni@ucy.ac.cy)
Ελένη Οδυσσέως (odysseos.o.eleni@ucy.ac.cy)
Σωτήρης Λοιζιάς (loizias.soteris@gmail.com)



Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under a Creative Commons License ([CC BY-SA 4.0](#)). Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

Η υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής στην παραγωγή της παρούσας έκδοσης δεν συνιστά αποδοχή του περιεχομένου, το οποίο αντικατοπτρίζει αποκλειστικά τις απόψεις των συντακτών, και η Επιτροπή δεν μπορεί να αναλάβει την ευθύνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Δραστηριότητες

Εισαγωγή – Πρόκληση Ενδιαφέροντος 1. (20 λεπτά)

Οι εκπαιδευτικοί εργάζονται με μια αριθμητική γραμμή, τοποθετημένη στο δάπεδο από το 0 μέχρι το 100. Συγκεκριμένα, διαχωρίζονται σε ομάδες των δύο ατόμων όπου ο ένας τοποθετεί τους αριθμούς πάνω στην αριθμητική γραμμή και ο άλλος βρίσκει τον κανόνα του μοτίβου. Στη συνέχεια, ο εκπαιδευτής θέτει τα πιο κάτω κάποια ερωτήματα ώστε να πραγματοποιηθεί μια συζήτηση στην ολομέλεια.

- Ποια στοιχεία του συναρτησιακού λογισμού εμπλέκονται στην πιο πάνω δραστηριότητα;
- Ποιες είναι οι αρχές σχεδιασμού της δραστηριότητας;

Εισαγωγή – Πρόκληση Ενδιαφέροντος 2. (15 λεπτά)

Στο σημείο αυτό οι εκπαιδευτικοί καλούνται να ακολουθήσουν μια σειρά από οδηγίες, ώστε να υπολογίσουν τον αριθμό που προκύπτει από την ημερομηνία γέννησης τους.

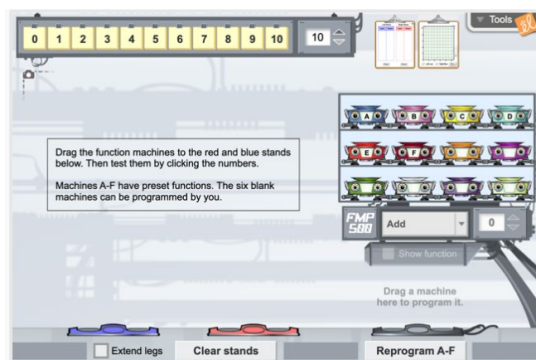
- Σημειώστε τον αριθμό που αντιστοιχεί στον μήνα γέννησής σας
- Πολλαπλασιάστε επί 5
- Προσθέστε 7
- Πολλαπλασιάστε επί 4
- Προσθέστε 13
- Πολλαπλασιάστε επί 5
- Προσθέστε τον αριθμό που αντιστοιχεί στην ημέρα γέννησής σας
- Ποιο είναι το αποτέλεσμα σας;

Ακολούθως, αναφέρουν τους αριθμούς αυτούς στον εκπαιδευτή, βρίσκει την ημερομηνία των γενεθλίων τους (από τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού που υπολογίστηκε αφαιρείται 5 για να βρεθεί η μέρα και από τα άλλα δύο ψηφία αφαιρείται 2 για να βρεθεί ο μήνας). Στη συνέχεια, οι εκπαιδευτικοί συζητούν ποιες πτυχές του συναρτησιακού λογισμού που εμπλέκονται στη συγκεκριμένη δραστηριότητα.

Συζήτηση – Εξερεύνηση Εφαρμογίδιου “Function Machines” (30 λεπτά)

Στη δραστηριότητα αυτή, οι εκπαιδευτικοί καλούνται να πειραματιστούν, με τη χρήση τάμπλετ, με την εφαρμογή “Function Machines” ώστε να κατανοήσουν τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί. Αφού το επεξεργαστούν, ο εκπαιδευτής πραγματοποιεί μια συζήτηση στην ολομέλεια θέτοντας στους εκπαιδευτικούς ερωτήματα όπως:

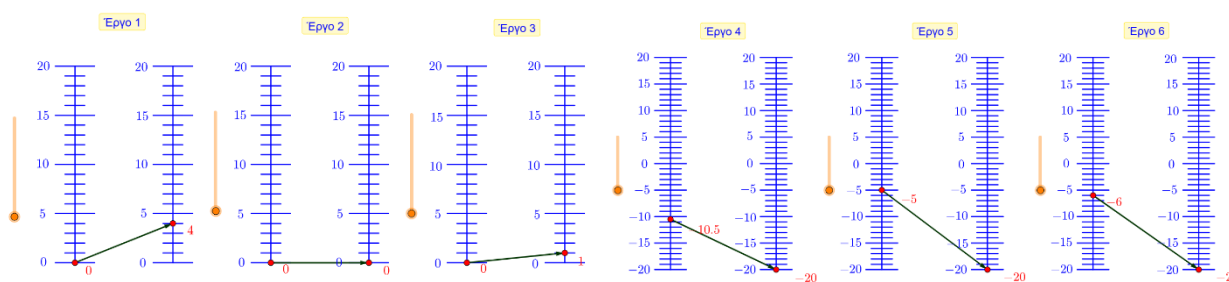
1. Πώς μπορεί να αξιοποιηθεί για την ανάπτυξη του συναρτησιακού συλλογισμού;
2. Ποια είδη σχέσεων εμπλέκονται;
3. Ποια πτυχή της συνάρτησης μπορεί να αναπτυχθεί μέσω του συνδυασμού των μηχανών;
4. Ποια είδη αναπαράστασης μπορούν να αξιοποιηθούν;



5. Να εισηγηθείτε 3 ιεραρχικά διαβαθμισμένες δραστηριότητες, με στόχο οι μαθητές να αναγνωρίζουν διαφορετικού τύπου σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων.
6. Να εισηγηθείτε ρεαλιστικά σενάρια, τα οποία να μπορούν να μοντελοποιηθούν με τη χρήση μίας μηχανής ή συνδυασμού μηχανών.

Συζήτηση – Εξερεύνηση Εφαρμογίδιου “GeoGebra” (30 λεπτά)

Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να εργαστούν με δύο εφαρμογίδια διπλών αριθμητικών γραμμών, μέσω του προγράμματος GeoGebra και να αναφέρουν ποιες πτυχές της έννοιας της συνάρτησης αναπτύσσονται μέσω των εφαρμογίδιων αυτών ([Functions Machines \(Tasks 1, 2, 3\) – GeoGebra](#), [Functions Machines \(Tasks 4, 5, 6\) – GeoGebra](#)). Παράλληλα, οι εκπαιδευτικοί διατυπώνουν ερωτήματα, τα οποία θα έθεταν στους μαθητές τους, ώστε να μελετήσουν την κατεύθυνση και το μέγεθος της συμμεταβολής σε κάθε περίπτωση.

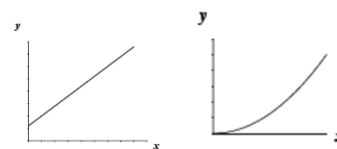


Συζήτηση (15 λεπτά)

Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να παρακολουθήσουν ένα βίντεο στο οποίο περιγράφεται το εφαρμογίδιο “Nomograms” ([Embodiment \(dwo.nl\)](#)). Αφού πειραματιστούν και αντιληφθούν τον τρόπο με τον οποίο λειτουργεί, συζητούν στην ολομέλεια για την αρχή σχεδιασμού στην οποία στηρίζεται, καθώς και στο πώς θα μπορούσαν οι ίδιοι να αξιοποιήσουν το εργαλείο αυτό.

Κλείσιμο (20 λεπτά)

Ως τελική δραστηριότητα, δίνεται στους εκπαιδευτικούς ένα φύλλο εργασίας πάνω στο οποίο υπάρχουν διάφορες γραφικές παραστάσεις (φαίνεται στο πλάι). Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να γράψουν ρεαλιστικά σενάρια βασισμένοι στις γραφικές παραστάσεις και να αναφέρουν τις δυσκολίες που θα αντιμετώπιζαν οι μαθητές.



Πλάνο Τρίτης Συνάντησης

Έννοια Συναρτήσεων ως σχέσεις Εισόδου-Εξόδου και Αντιστοίχισης	
Διδακτικός Χρόνος:	120 λεπτά
Άτομα στα οποία απευθύνονται:	Προ-υπηρεσιακοί και εν-ενεργεία εκπαιδευτικοί
Σημαντικοί Σύνδεσμοι	
Περιβάλλον εκμάθησης:	<ul style="list-style-type: none"> • https://tim-lutz.de/funktionenlaufen/indexLinear.html • https://student.desmos.com/join/t29wfg
Περιγραφή	
Στόχοι:	<ul style="list-style-type: none"> • Να διερευνήσουν τη μεταβολή ποσοτήτων, να εντοπίσουν σχέσεις αντιστοίχισης και να τις γενικεύσουν (λεκτικά και συμβολικά) • Να ερμηνεύσουν αναπαραστάσεις και να κάνουν συνδέσεις μεταξύ αναπαραστάσεων αυτών (κίνηση, γραφική παράσταση)
Δομή Συνάντησης:	<ol style="list-style-type: none"> 1. Πρόκληση Ενδιαφέροντος <ol style="list-style-type: none"> α. «Περπατώντας στην αριθμητική γραμμή» με βάση δοσμένες οδηγίες ή γραφικές παραστάσεις β. Χρήση εφαρμογιδίου καταγραφής κινήσεων 2. Πειραματισμός με τη χρήση του εφαρμογιδίου «Turtle Crossing» <ul style="list-style-type: none"> ο Οι εκπαιδευτικοί επιλύουν τις δραστηριότητες ως μαθητές 3. Αξιολόγηση δοσμένου μαθήματος και συζήτηση ως προς τα στοιχεία του συναρτησιακού λογισμού που μπορούν να εξαχθούν μέσω αυτού 4. Δημιουργία γραφικών παραστάσεων με βάση ρεαλιστικά σενάρια 5. Παρακολούθηση συνέντευξης μαθητών και συζήτηση των δυσκολιών που αντιμετώπισαν 6. Ιεράρχηση δραστηριοτήτων με βάση το βαθμό δυσκολίας 7. Εισήγηση σεναρίων που μπορούν να αξιοποιηθούν στο δημοτικό σχολείο για την ανάπτυξη της κατανόησης της συνάρτησης ως δυναμική διαδικασία συμμεταβολής

Το υλικό αυτό παρέχεται από την ομάδα [FunThink Team](#), Υπεύθυνο Ίδρυμα: Ομάδα Διδακτικής των Μαθηματικών – Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Μάριος Πιπτάλης (pittalis.marios@ucy.ac.cy)
 Ελένη Δημοσθένους (demosthenous.eleni@ucy.ac.cy)
 Ελένη Οδυσσέως (odysseos.o.eleni@ucy.ac.cy)
 Σωτήρης Λοιζιάς (loizias.soteris@gmail.com)



Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under a Creative Commons License ([CC BY-SA 4.0](#)). Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

Η υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής στην παραγωγή της παρούσας έκδοσης δεν συνιστά αποδοχή του περιεχομένου, το οποίο αντικατοπτρίζει αποκλειστικά τις απόψεις των συντακτών, και η Επιτροπή δεν μπορεί να αναλάβει την ευθύνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

Δραστηριότητες

Εισαγωγή – Πρόκληση Ενδιαφέροντος (20 λεπτά)

Ο εκπαιδευτής παρουσιάζει στους εκπαιδευτικούς μια αριθμητική γραμμή από το 1 – 100 και τους χωρίζει σε ζευγάρια. Κάθε ζευγάρι έχει στη διάθεση του μια καρτέλα με δοσμένες οδηγίες ή γραφικές παραστάσεις, τις οποίες πρέπει να αναπαραστήσουν κινούμενοι πάνω στην αριθμητική γραμμή. Κατά τη διαδικασία αυτή, οι υπόλοιποι εκπαιδευτικοί πρέπει να παρακολουθούν το κινούμενο ζευγάρι, προκειμένου να αντιληφθούν την οδηγία που εκτελούν και να σχεδιάσουν την κατάλληλη γραφική παράσταση.

Ακολούθως, ο εκπαιδευτής παρουσιάζει στους εκπαιδευτικούς ένα εφαρμογίδιο καταγραφής κινήσεων, το οποίο καταγράφει την κίνηση ενός ατόμου και την μετατρέπει σε γραφική παράσταση θέσης – χρόνου.

Εξερεύνηση. (15 λεπτά)

Στο σημείο αυτό δίνεται στους εκπαιδευτικούς το εφαρμογίδιο “Turtle Crossing”, από την ιστοσελίδα Desmos, με το οποίο αρχικά πειραματίζονται και στη συνέχεια εργάζονται σε δραστηριότητες ως μαθητές.



Συζήτηση στην ολομέλεια. (15 λεπτά)

Ο εκπαιδευτής δίνει στους εκπαιδευτικούς ένα έτοιμο μάθημα (Ενότητα: Απόσταση-Χρόνος), που πραγματοποιήθηκε σε σχολεία, το οποίο σχετίζεται με τον συναρτησιακό λογισμό. Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να το μελετήσουν και να αναφέρουν:

1. Ποιες οι βασικές αρχές σχεδιασμού του μαθήματος;
2. Ποιες πτυχές της συνάρτησης εμπλέκονται;

Δραστηριότητα 1. (10 λεπτά)

Δίνονται στους εκπαιδευτικούς διάφορα σενάρια που αφορούν το πλαίσιο του εφαρμογιδίου με τη χελώνα και καλούνται να κατασκευάσουν τις αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις και να απαντήσουν σε ερωτήματα.

Σενάριο 1: Η χελώνα απομακρύνεται από το νερό. Ξαφνικά κάνει ένα σύντομο διάλειμμα. Στη συνέχεια συνεχίζει να απομακρύνεται από το νερό.

Σενάριο 2: Η χελώνα απομακρύνεται από το νερό. Ξαφνικά κάνει ένα σύντομο διάλειμμα. Στη συνέχεια επιστρέφει προς το νερό. Πριν φτάσει στο νερό, αποφασίζει να απομακρυνθεί και πάλι.

Σενάριο 3: Η χελώνα απομακρύνεται από το νερό 8 ft σε 4 δευτερόλεπτα. Κάνει στάση για 2 δευτερόλεπτα. Στη συνέχεια επιστρέφει στο νερό, σε 2 μόνο δευτερόλεπτα.

Σενάριο 4: Η χελώνα βρίσκεται σε απόσταση 4 ft από το νερό. Απομακρύνεται ακόμη 2 ft στα επόμενα 4 δευτερόλεπτα. Στη συνέχεια επιστρέφει στο νερό, διανύοντας 2 ft κάθε ένα δευτερόλεπτο.

Συζήτηση στην ολομέλεια (20 λεπτά)

Οι εκπαιδευτικοί παρακολουθούν τις συνεντεύξεις μαθητών οι οποίοι κλήθηκαν να εργαστούν σε παρόμοιες δραστηριότητες με το εφαρμογίδιο «Turtle Crossing». Με βάση τα όσα παρακολουθήσουν στο βίντεο, πραγματοποιείται μια συζήτηση στην ολομέλεια κατά την οποία αναφέρουν τις δυσκολίες που θεωρούν πως αντιμετώπισαν οι μαθητές, ανάλογα με τις απαντήσεις τους και τον τρόπο εργασίας τους.

Δραστηριότητα 2. (25 λεπτά)

Ο εκπαιδευτής παρουσιάζει στους εκπαιδευτικούς δραστηριότητες συναρτησιακού λογισμού και τους καλεί να τις ιεραρχήσουν βάση το βαθμό δυσκολίας. Ακολουθεί συζήτηση στην ολομέλεια για τη σειρά με την οποία να συστήνεται να ιεραρχηθούν οι δραστηριότητες, βασισμένη στις γνώσεις που πρέπει να έχουν οι μαθητές, καθώς και τις δυσκολίες που μπορεί να αντιμετωπίσουν σε κάθε μια από αυτές.

Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει την πτήση ενός αερόστατου.

Χρόνος (σε min)	Υψος (σε m)
0	0
10	120
15	180
30	360
40	410
45	485
60	710
70	710
80	560
90	260

(α) Ο ρυθμός αύξησης του ύψους του αερόστατου ήταν ο ίδιος σε όλη τη διάρκεια της ανόδου; Να εξηγήσετε.

(β) Σε ποια χρονικά διαστήματα ο ρυθμός αύξησης ή μείωσης του ύψους του αερόστατου ήταν ο ίδιος; Να εξηγήσετε.

Οι γραφικές παραστάσεις A, B, Γ και Δ παρουσιάζουν πακέτα χρέωσης μιας εταιρείας κινητής τηλεφωνίας με βάση τα λεπτά ομιλίας.

Πιο κάτω δίνονται λεκτικές περιγραφές:

P_1 : Δεν υπάρχει μηνιαίο πάγιο. Υπάρχει σταθερή χρέωση ανά λεπτό ομιλίας.

P_2 : Υπάρχει μηνιαίο πάγιο και σταθερή χρέωση ανά λεπτό ομιλίας.

P_3 : Υπάρχει μηνιαίο πάγιο. Προσφέρονται δωρεάν λεπτά χρόνου ομιλίας. Όταν ξεπεραστούν τα λεπτά αυτά, υπάρχει σταθερή χρέωση ανά λεπτό ομιλίας.

P_4 : Δεν υπάρχει μηνιαίο πάγιο. Υπάρχει σταθερή χρέωση για έναν αριθμό λεπτών ομιλίας. Όταν ξεπεραστούν τα λεπτά αυτά η χρέωση ανά λεπτό ομιλίας μειώνεται.

P_5 : Υπάρχει μηνιαίο πάγιο και προσφέρεται δωρεάν απεριόριστος χρόνος ομιλίας.

P_6 : Δεν υπάρχει μηνιαίο πάγιο. Προσφέρονται δωρεάν λεπτά χρόνου ομιλίας. Όταν ξεπεραστούν τα λεπτά αυτά, υπάρχει σταθερή χρέωση ανά λεπτό ομιλίας.

Να αντιστοιχίσετε τις γραφικές παραστάσεις με τις λεκτικές περιγραφές, συμπληρώνοντας τον πιο κάτω πίνακα.

Γραφική Παράσταση				
Λεκτική Περιγραφή				

Πίνακας Τιμών	Εξίσωση										
<table border="1"> <thead> <tr><th>x</th><th>y</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>-2</td><td>-5</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-3</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td></tr> </tbody> </table>	x	y	-2	-5	-1	-3	1	1	2	3	$y = x$
x	y										
-2	-5										
-1	-3										
1	1										
2	3										
<table border="1"> <thead> <tr><th>x</th><th>y</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>-2</td><td>3</td></tr> <tr><td>-1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td></tr> </tbody> </table>	x	y	-2	3	-1	0	1	0	2	3	$y = 3$
x	y										
-2	3										
-1	0										
1	0										
2	3										
	$y = 2x - 1$										
	$y = x^2 - 1$										

11. Ένα ντεπόζιτο νερού έχει τη μορφή και τις διαστάσεις που φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Αρχικά το ντεπόζιτο είναι άδειο. Μετά το γεμίζουμε νερό με ρυθμό ένα λίτρο ανά δευτερόλεπτο. Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις δείχνει πώς το ύψος του νερού μεταβάλλεται με την πάροδο του χρόνου;

PISA 2003

Κλείσιμο (15 λεπτά)

Ο εκπαιδευτής καλεί τους εκπαιδευτικούς να εισηγηθούν στην ολομέλεια σενάρια που μπορούν να αξιοποιηθούν στο Δημοτικό σχολείο για την ανάπτυξη της κατανόησης της συνάρτησης ως δυναμική διαδικασία συμμεταβολής.

Πλάνο Τέταρτης Συνάντησης

Μοτίβα	
Διδακτικός Χρόνος:	120 λεπτά
Άτομα στα οποία απευθύνονται:	Προ-υπηρεσιακοί και εν-ενεργεία εκπαιδευτικοί
Σημαντικοί Σύνδεσμοι	
Περιβάλλον εκμάθησης:	<ul style="list-style-type: none"> https://www.geogebra.org/m/st85nctn Βίντεο (2.50'): https://www.youtube.com/watch?v=t179ZcUdCOA&t=241s https://www.geogebra.org/m/u8jiaspkc https://www.geogebra.org/m/se9dk6sc https://www.geogebra.org/m/q5ubbc9g https://www.geogebra.org/m/tjgrwmkp https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/61e8507ff070d2108c7bb984?collections=61bcc95700581818dff1d4d7%2C61bcc1bdb50d15651f028c4#preview/f83a40d7-bad1-44aa-a191-e64e564cf6a3 https://apps.mathlearningcenter.org/pattern-shapes/
Περιγραφή	
Στόχοι:	<ul style="list-style-type: none"> Να εξερευνήσουν τις πτυχές της συμμεταβολής και της αντιστοιχίας της συναρτησιακής σκέψης Να ερμηνεύσουν αναπαραστάσεις και να κάνουν συνδέσεις μεταξύ αναπαραστάσεων (γραφική αναπαράσταση μοτίβου, πίνακας, γραφήματα) Να εκφράσουν τη σχέση μεταξύ των ποσοτήτων με γενικευμένους τύπους (λεκτικά και συμβολικά)
Δομή Συνάντησης:	<ol style="list-style-type: none"> Πρόκληση Ενδιαφέροντος με τη χρήση του εφαρμογιδίου για εύρεση σχέσεων https://www.geogebra.org/m/st85nctn «Ανθρώπινη πυραμίδα» <ul style="list-style-type: none"> Συζήτηση στην ολομέλεια για την αξιοποίηση του βίντεο στη διδασκαλία των μοτίβων https://www.youtube.com/watch?v=t179ZcUdCOA&t=241s

Το υλικό αυτό παρέχεται από την ομάδα [FunThink Team](#), Υπεύθυνο Ίδρυμα: Ομάδα Διδακτικής των Μαθηματικών – Τμήμα Επιστημών της Αγωγής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Μάριος Πιτάλης (pittalis.marios@ucy.ac.cy)
Ελένη Δημοσθένους (demosthenous.eleni@ucy.ac.cy)
Ελένη Οδυσσεώς (odysseos.o.eleni@ucy.ac.cy)
Σωτήρης Λοιζιάς (loizias.soteris@gmail.com)



Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under a Creative Commons License ([CC BY-SA 4.0](#)). Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

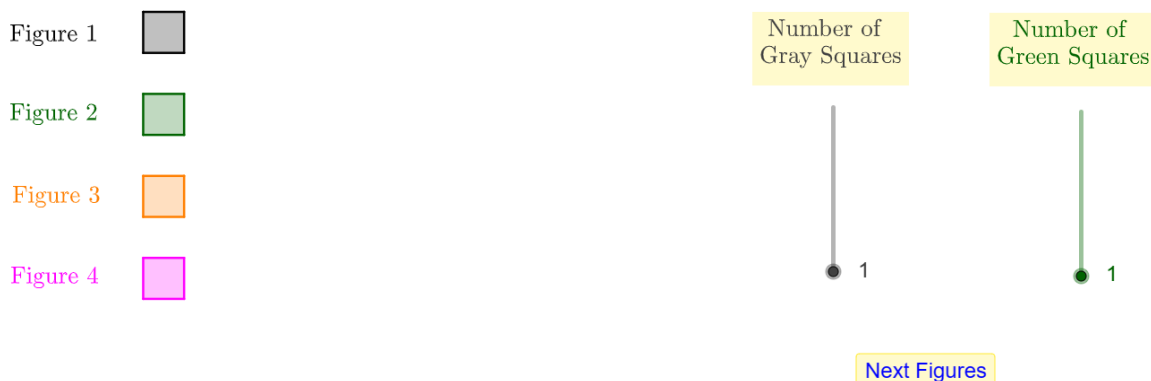
Η υποστήριξη της Ευρωπαϊκής Επιτροπής στην παραγωγή της παρούσας έκδοσης δεν συνιστά αποδοχή του περιεχομένου, το οποίο αντικατοπτρίζει αποκλειστικά τις απόψεις των συντακτών, και η Επιτροπή δεν μπορεί να αναλάβει την ευθύνη για οποιαδήποτε χρήση των πληροφοριών που περιέχονται σε αυτήν.

3. Εξερεύνηση εφαρμογιδίου
 - Δημιουργία ερωτήσεων που απευθύνονται στις πτυχές του συναρτησιακού λογισμού
<https://www.geogebra.org/m/u8jaspkc>
4. Παρουσίαση Μοτίβων
 - Ορισμός
 - Κριτήρια Κατηγοριοποίησης
 - Είδη Μοτίβων
 - Δραστηριότητες
5. Εξερεύνηση Εφαρμογιδίων
 - <https://www.geogebra.org/m/se9dk6sc>
 - <https://www.geogebra.org/m/q5ubbc9g>
 - <https://www.geogebra.org/m/tjgrwmkp>
6. Επίλυση φύλλου εργασίας και συζήτηση για αξιοποίηση του
7. Παρουσίαση Βίντεο
 - Συζήτηση στην ολομέλεια για τα θετικά και αρνητικά στοιχεία της διδασκαλίας που παρακολούθησαν
 - Τι θα άλλαζαν
 - Πως θα αξιοποιούσαν τα εφαρμογίδια και το έντυπο υλικό
 - Ιδέες για τη δική τους διδασκαλία
8. Χρήση εφαρμογιδίου για επίλυση δραστηριοτήτων

Δραστηριότητες

Εισαγωγή – Πρόκληση Ενδιαφέροντος (10 λεπτά)

Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να εξερευνήσουν ένα εφαρμογίδιο με μοτίβα στο GeoGebra (<https://www.geogebra.org/m/st85nctn>) και να αναφέρουν ποιες σχέσεις παρατηρούν σε κάθε περίπτωση. Ακολουθεί συζήτηση σχετικά με τον αναδρομικό κανόνα του μοτίβου (ο επόμενος όρος ισούται με το άθροισμα των δύο προηγούμενων πλην ένα).



Συζήτηση στην ολομέλεια. (15 λεπτά)

Ο εκπαιδευτής παρουσιάζει στους εκπαιδευτικούς ένα βίντεο, στο οποίο μια ομάδα μαθητών σχηματίζει μια ανθρώπινη πυραμίδα ακολουθώντας ένα συγκεκριμένο κανόνα. Ο εκπαιδευτής πραγματοποιεί μια συζήτηση στην ολομέλεια για το πώς δημιουργείται η ανθρώπινη πυραμίδα. Ακολούθως, καλεί τους εκπαιδευτικούς να αναφέρουν πως θα χρησιμοποιούσαν το συγκεκριμένο βίντεο στη διδασκαλία τους, τι ερωτήσεις θα έθεταν, πως θα οργάνωναν τη συζήτηση στην ολομέλεια, ποιες απαντήσεις αναμένουν να δώσουν οι μαθητές και πώς το βίντεο αυτό θα βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν την έννοια του μοτίβου για εισαγωγή στο μάθημα.

Ερωτήματα:

1. Πώς θα μπορούσε να αξιοποιηθεί στη διδασκαλία των μοτίβων;
2. Ποια ερωτήματα θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν για να αρχίσουν οι μαθητές να εντοπίζουν σχέσεις (είσοδου-εξόδου, συμμεταβολής, αντιστοίχισης);

Δραστηριότητα 1. (10 λεπτά)

Σε συνέχεια της πιο πάνω δραστηριότητας με την ανθρώπινη πυραμίδα, στο σημείο αυτό ο εκπαιδευτής παρουσιάζει στους εκπαιδευτικούς μια εφαρμογή στο GeoGebra (<https://www.geogebra.org/m/u8jaspkc>), στην οποία μπορούν να φτιάξουν διαφορετικά μεγέθη πυραμίδων. Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να την εξερευνήσουν και να αναφέρουν στην ολομέλεια της εισηγήσεις τους όσον αφορά ερωτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές πτυχές του συναρτησιακού λογισμού (π.χ. είσοδος-έξοδος, συμμεταβολή, αντιστοίχιση)

Παρουσίαση. (15 λεπτά)

Αφού οι εκπαιδευτικοί έρθουν σε επαφή με δραστηριότητες που αφορούν τα μοτίβα, ο εκπαιδευτής πραγματοποιεί μια παρουσίαση κατά την οποία (α) δίνεται ένας ορισμός για τα μοτίβα, (β) παρουσιάζονται τα κριτήρια κατηγοριοποίησης των μοτίβων, (γ) παρουσιάζονται

τα είδη των μοτίβων και (δ) παρουσιάζονται δραστηριότητες που μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν ικανότητες που αφορούν τα μοτίβα στην ολότητα τους.

Δραστηριότητα 2. (10 λεπτά)

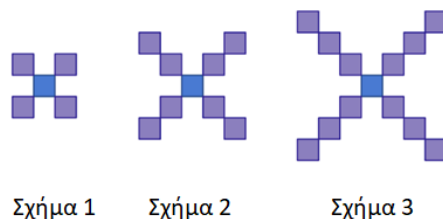
Στη δραστηριότητα αυτή οι εκπαιδευτικοί καλούνται να εξερευνήσουν τρία εφαρμογίδια μοτίβων στο GeoGebra και να περιγράψουν με διαφορετικούς τρόπους τα μοτίβα (<https://www.geogebra.org/m/se9dk6sc>, <https://www.geogebra.org/m/q5ubbc9g>, <https://www.geogebra.org/m/tjgrwmkp>)

Δραστηριότητα 3. (30 λεπτά)

Στο σημείο αυτό ο εκπαιδευτής παρουσιάζει στους εκπαιδευτικούς ένα φύλλο εργασίας πάνω στο οποίο υπάρχουν διάφορες δραστηριότητες. Οι εκπαιδευτικοί, αφού λύσουν τις δραστηριότητες αυτές, καλούνται να παρουσιάσουν τις δυσκολίες που θα αντιμετώπιζαν οι μαθητές και τα ερωτήματα που θα τους έθεταν.

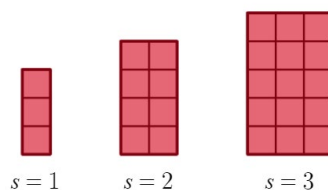
Εργασία 1:

Πώς συνδέεται η έννοια της συνάρτησης με τα μοτίβα; Να χρησιμοποιήσετε το πιο κάτω μοτίβο για να βρείτε τη συνάρτηση που εμπλέκεται.



Εργασία 2:

Πώς περιγράφουν το πιο κάτω μοτίβο οι μαθητές;



- Κυριάκος: «Βλέπω 1 τετράγωνο και 2 σειρές»
- Λίζα: «Βλέπω ένα ορθογώνιο όπου το μήκος είναι 2 περισσότερα από το πλάτος»

(α) Να δείξετε πώς βλέπει το μοτίβο ο μαθητής.

(β) Πώς θα περιγράψει ο κάθε μαθητής τον τρόπο που σχεδιάσει το σχήμα όταν $s=4$;

Εργασία 3:

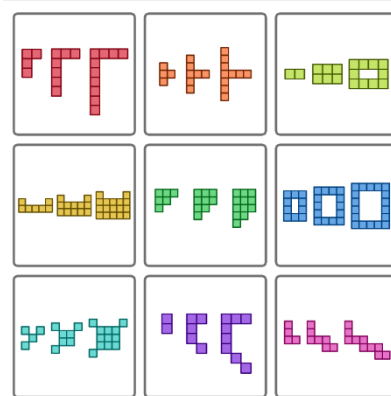
Να διαλέξετε ένα από τα πιο κάτω μοτίβα.

(α) Να σχεδιάσετε το επόμενο σχήμα.

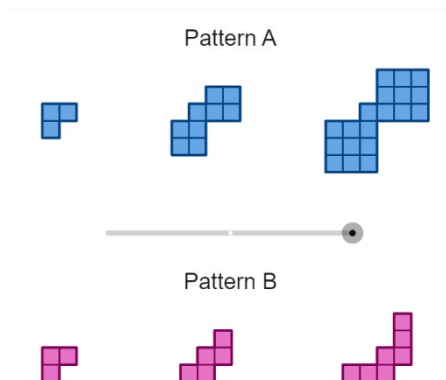
(β) Να σχεδιάσετε το Σχήμα 10.

(γ) Να βρείτε μια μαθηματική πρόταση για να υπολογίσετε τον αριθμό των τετραγώνων για το Σχήμα 10.

(δ) Να βρείτε μια μαθηματική πρόταση για τον αριθμό των τετραγώνων στο Σχήμα n.



Εργασία 4:



(α) Πώς μοιάζουν και πώς διαφέρουν τα δύο μοτίβα;

(β) Πόσα τετράγωνα θα έχει στο Σχήμα n σε κάθε μοτίβο;

Συζήτηση στην ολομέλεια (20 λεπτά)

Συνεχίζοντας, ο εκπαιδευτής παρουσιάζει στους εκπαιδευτικούς ένα βίντεο διδασκαλίας μοτίβων σε μαθητές ΣΤ' τάξης Δημοτικού. Αφού το παρακολουθήσουν οι εκπαιδευτικοί, πραγματοποιείται μια συζήτηση στην ολομέλεια κατά την οποία παρουσιάζονται ιδέες για το πώς θα προσέγγιζαν οι ίδιοι την συγκεκριμένη διδασκαλία και τι θα άλλαζαν σε αυτή. Ακολούθως, ο εκπαιδευτής τους ζητά να αναφέρουν εισηγήσεις για το πώς θα χρησιμοποιούσαν τα εφαρμογίδια που τους παρουσιάστηκαν στη διδασκαλία τους καθώς και πώς θα χρησιμοποιούσαν το υλικό και αν αυτό θα ήταν βοηθητικό για τους ίδιους.

Κλείσιμο. (10 λεπτά)

Κλείνοντας, ο εκπαιδευτής παρουσιάζει στην ολομέλεια μια εφαρμογή με την οποία θα αλληλοεπιδράσουν ώστε να απαντήσουν τις πιο κάτω ερωτήσεις:

(α) Να σχεδιάσετε δύο διαφορετικές επιλογές για το πώς μπορεί να είναι το Σχήμα 3.



(β) Να φτιάξετε ένα μοτίβο που να ταιριάζει με τον πιο κάτω πίνακα.

Αριθμός Σχήματος	Αριθμός κομματιών
1	4
2	7
3	10