

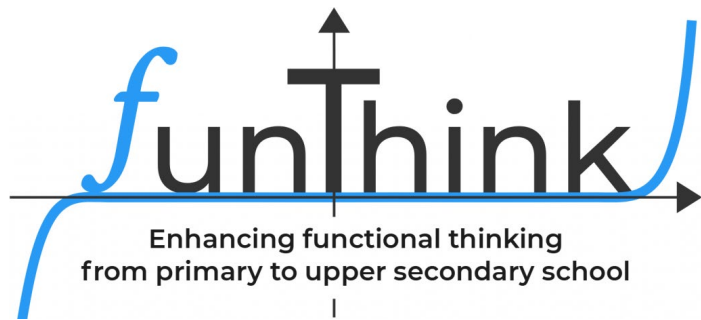
This material is provided by the [FunThink Team](#), responsible institution:
University of Cyprus

Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under a Creative Commons License ([CC BY-SA 4.0](#)). Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



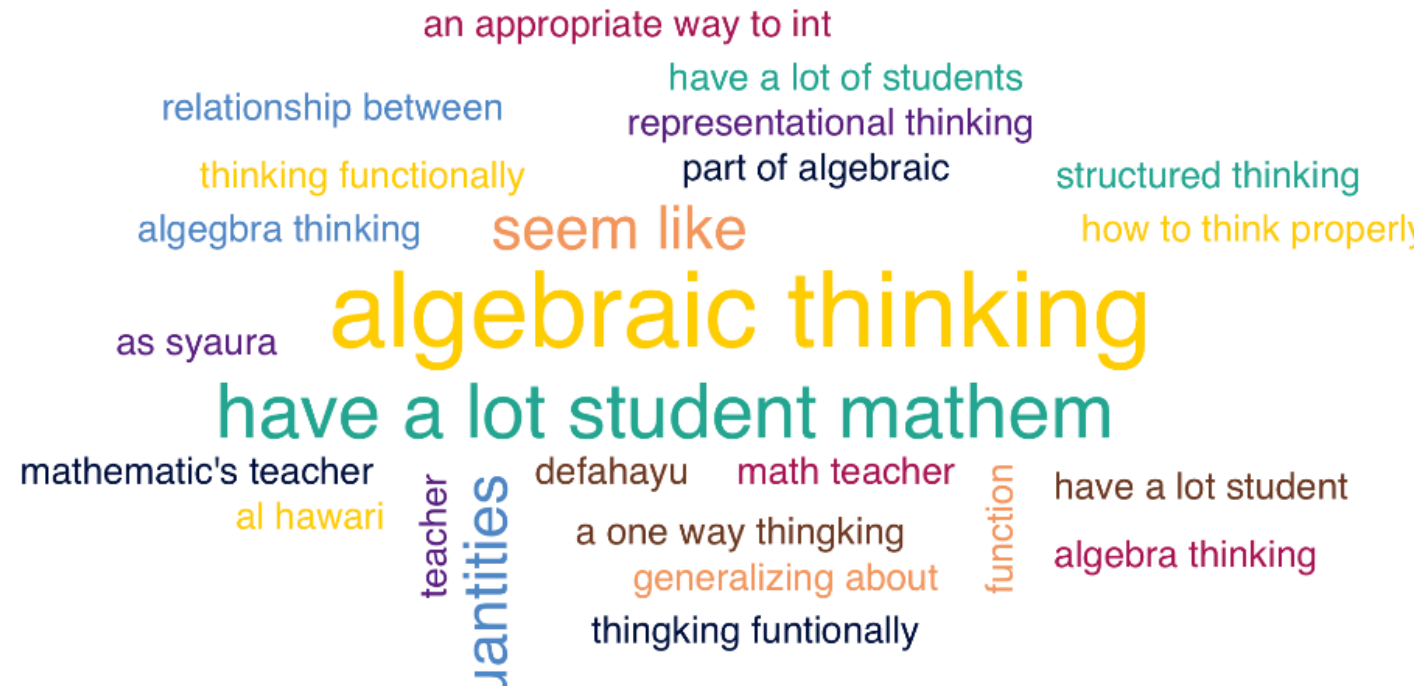
University of Cyprus
Department of Education

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



Συναρτησιακός λογισμός
(functional thinking)

What is Functional Thinking?




“A way of thinking in terms of relationships, interdependencies, and change“

“The process of building, describing, and reasoning with and about functions“

Σημασία συναρτησιακού λογισμού

- Σε πολλές καταστάσεις της καθημερινής ζωής εμπλέκονται συναρτησιακές σχέσεις
- Η κατανόηση της εξάπλωσης του ιού COVID-19 ως μια εκθετική συνάρτηση και η προσπάθεια περιορισμού της εξάπλωσης του ιού στα πρώτα στάδια της πανδημίας απαιτούσε τον συντονισμό διαφορετικών μεταβλητών και την αναγνώριση των μεταξύ τους σχέσεων
- Ο συναρτησιακός λογισμός εμπλέκεται σε όλα τα είδη σκέψης
- Ο συναρτησιακός λογισμός είναι το είδος του λογισμού που αναφέρεται σε ποσοτικές σχέσεις και προκύπτει από την έμφυτη τάση των ανθρώπων να αναζητούν σχέσεις μεταξύ ποσοτήτων και ιδεών

(Schotten, 1907)



Εκπαίδευση και συναρτησιακός λογισμός

- Το κίνημα του Meraner Lehrplan στη Γερμανία, το 1905, διακήρυττε την ανάγκη για “εκπαίδευση στον συναρτησιακό λογισμό”, ως προ-απαιτούμενο για τη διδασκαλία των μαθηματικών στο γυμνάσιο
 - Η ιδέα αυτή αποτέλεσε βασικό σύνθημα του κινήματος αλλαγής στη διδασκαλία των μαθηματικών στη Γερμανία και σε άλλες χώρες στις αρχές του 20^{ου} αιώνα
 - Ενοποιητικό στοιχείο αναλυτικού προγράμματος
 - Μέχρι στιγμής, καμιά άλλη έννοια δεν έχει προκαλέσει τόσες συζητήσεις για την αξία της στη μαθηματική εκπαίδευση (Vohns, 2016).
-

Ορισμός

Ο συναρτησιακός λογισμός έχει οριστεί με διαφορετικούς τρόπους. Ως σημείο αναφοράς, υιοθετούμε τον ορισμό του συναρτησιακού λογισμού ως τη διαδικασία περιγραφής, οικοδόμησης και συλλογισμού για σχέσεις που προκύπτουν από συναρτήσεις ή για συναρτήσεις (Stephens et al., 2017).

Συναρτησιακός συλλογισμός

- Γενίκευση
- Αναπαράσταση σχέσης μεταξύ ποσοτήτων
- Δομή
- Συμμεταβολή
- Αλλαγή
- Σχέσεις
- Ερμηνεία ποιοτικών αλλαγών για επεξήγηση σχέσεων
- Αξιοποίηση σχέσεων για επίλυση προβλημάτων
- Έννοια της συνάρτησης = πυρήνας συναρτησιακού συλλογισμού

Πτυχές συνάρτησης

- Συνάρτηση ως διαδικασία εισόδου-εξόδου
- Συνάρτηση ως μια δυναμική διαδικασία μεταβολής
- Συνάρτηση ως μιας σχέση αντιστοίχισης
- Συνάρτηση ως μαθηματικό αντικείμενο

(Pittalis et al., 2020; Doorman et al., 2012)

Συνάρτηση ως διαδικασία εισόδου-εξόδου

- Υπολογιστικός χαρακτήρας συνάρτησης
- Αναπαραστάσεις: βελοδιάγραμμα, πίνακες εισόδου-εξόδου
- Δεν απαιτεί αντίληψη της αιτιώδους σχέσης εισόδου-εξόδου
- Παραδείγματα:
 - Υπολογισμός τιμής εξόδου σε δοσμένη τιμή εισόδου σε αριθμομηχανή
 - Υπολογισμός ποσού πληρωμής για αγορά προϊόντων συναρτήσει της ποσότητας των αντικειμένων



Συνάρτηση ως μια δυναμική διαδικασία συμμεταβολής

- Κατανόηση συμμεταβολής ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής – Μεταβολή ανεξάρτητης στο πεδίο ορισμού προκαλεί μεταβολή της εξαρτημένης στο πεδίο τιμών
 - Συνάρτηση ως δύο ποσότητες που μεταβάλλονται ταυτόχρονα (Thompson & Carlson, 2017)
 - Αναπαραστάσεις: πίνακας τιμών, γραφική παράσταση
 - Παραδείγματα:
 - Μελέτη της αλλαγής της απόστασης που διανύει ένα αντικείμενο συναρτήσει του χρόνου
-

Συνάρτηση ως μια σχέση αντιστοίχισης

- Κατανόηση της σχέσης μεταξύ της ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής και αναπαράσταση της σχέσης αυτής
- Γενική σχέση μεταξύ των δύο ποσοτήτων
- Έννοια αντιστοίχισης
- Οδηγεί στον τυπικό ορισμό της συνάρτησης – ορισμός Dirichlet στις ανώτερες τάξεις λυκείου
- Αναπαραστάσεις: γραφικές παραστάσεις, νομογράφημα
- Παράδειγμα:
 - Μελέτη σχέσεων μεταξύ φαινομένων, όπως η ηλικία και ο κίνδυνος νόσησης από τον ιό COVID

Συνάρτηση ως μαθηματικό αντικείμενο

- Ιδιότητες συνάρτησης ως μαθηματικό αντικείμενο και διαφορετικές αναπαραστάσεις για σύγκριση με άλλα μαθηματικά αντικείμενα
- Εξαγωγή συμπερασμάτων για οικογένειες συναρτήσεων
- Διερεύνηση ανωτέρου επιπέδου διαδικασιών (παραγωγή)
- Αναπαραστάσεις: γραφική παράσταση, συμβολική αναπαράσταση του γενικού τύπου
- Παράδειγμα:
 - Σύγκριση ιδιοτήτων πολυωνυμικών συναρτήσεων για τις εκθετικές συναρτήσεις
 - Αναγνώριση των χαρακτηριστικών κάθε οικογένειας

Περιγραφή συναρτησιακού λογισμού

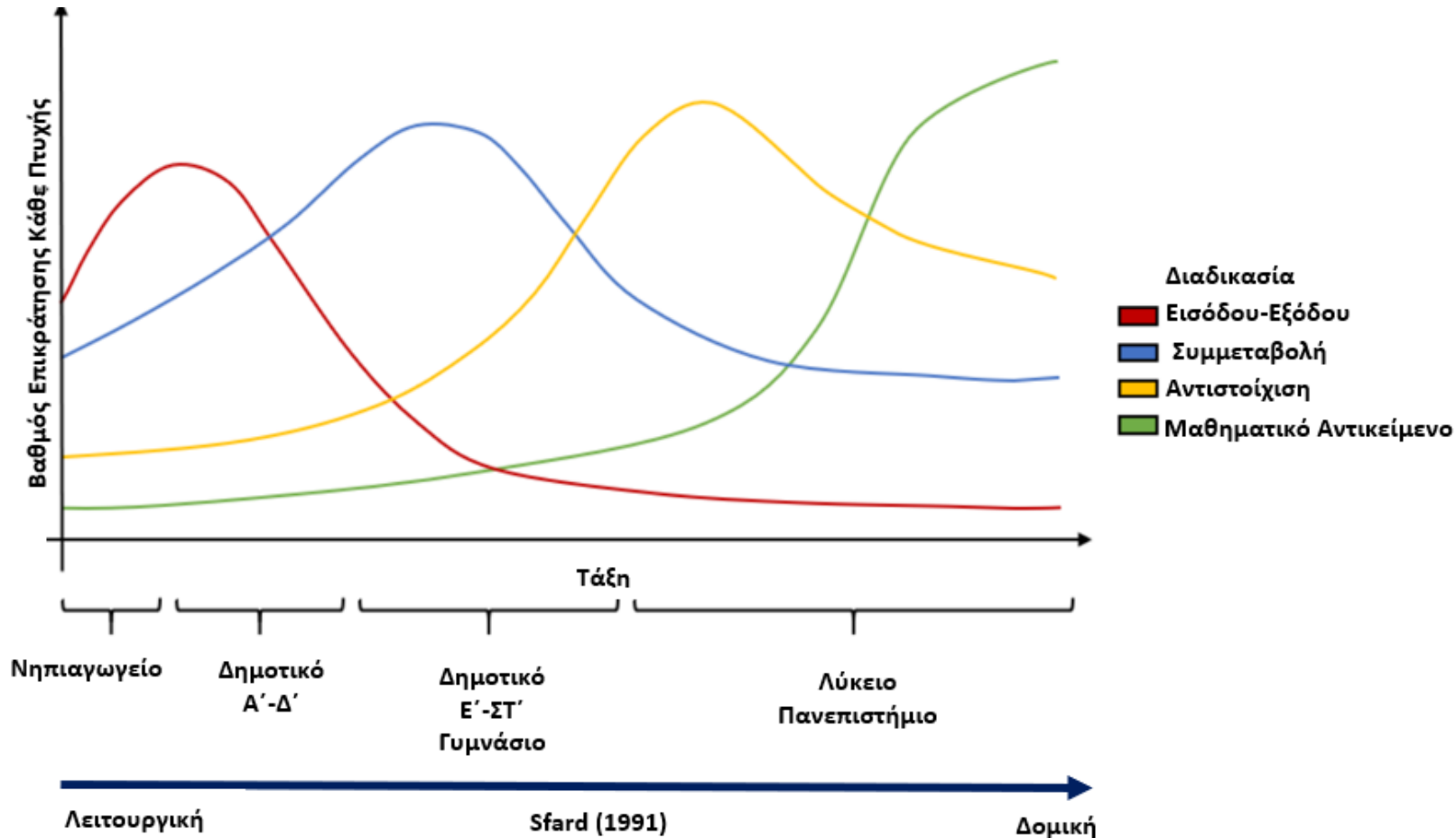
Μαθητές δημοτικού

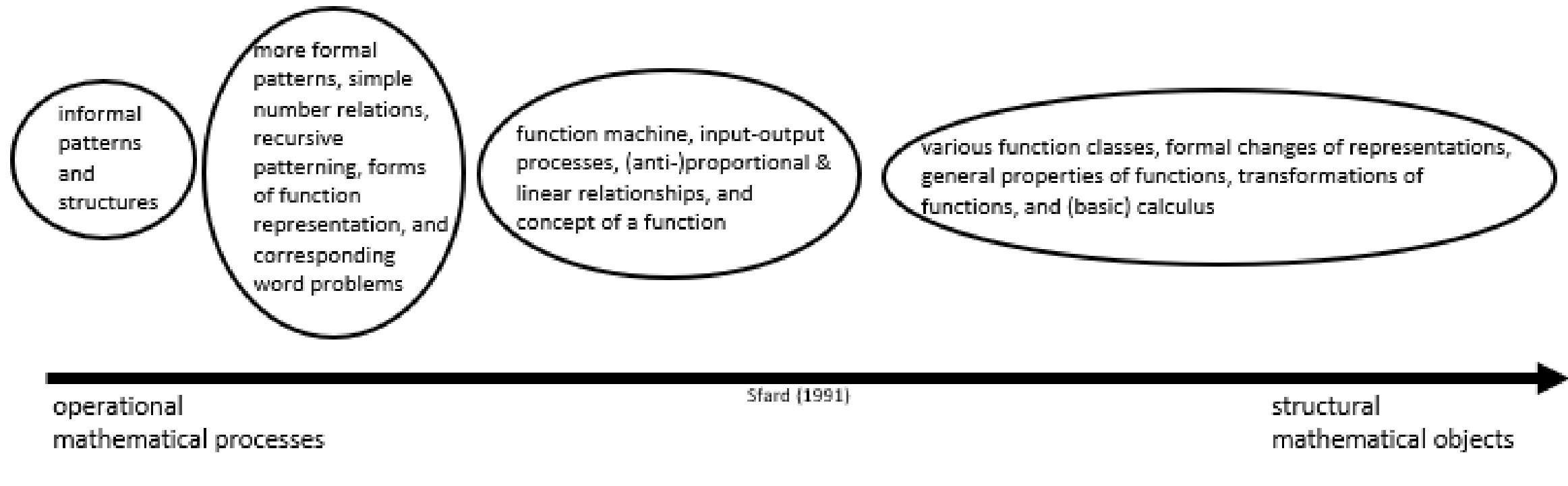
- Το είδος του λογισμού που επεξεργάζεται την αμετάβλητη σχέση μεταξύ δύο ποσοτήτων/μεταβλητών που μεταβάλλονται ταυτόχρονα.
- Διευκολύνει τη μετάβαση από τον χειρισμό σχέσεων μεταξύ συγκεκριμένων τιμών σε γενίκευση για σχέσεις που ισχύουν για σύνολα τιμών.
 - εντοπισμός και γενίκευση σχέσεων μεταξύ ποσοτήτων/μεταβλητών που μεταβάλλονται ταυτόχρονα
 - αναπαράσταση των σχέσεων αυτών λεκτικά, συμβολικά ή με άλλο είδος αναπαράστασης
 - αξιοποίηση των τρόπων αυτών αναπαράστασης στην επίλυση προβλημάτων

Για μαθητές γυμνασίου

- Η περιγραφή αυτή εμπλουτίζεται σταδιακά με την πτυχή της συνάρτησης ως μαθηματικό αντικείμενο και προσθέτει στις διαστάσεις του συναρτησιακού λογισμού την περιγραφή, την ερμηνεία και την αξιοποίηση των ιδιοτήτων των συναρτήσεων σύμφωνα με τις δυνατότητες και τους περιορισμούς των διαφορετικών μορφών αναπαράστασης της κάθε κατηγορίας συναρτήσεων, όπως η επεξήγηση του ρόλου των παραμέτρων.

Ανάπτυξη συναρτησιακού λογισμού με βάση τη βιβλιογραφία





Κοινά
Χαρακτηριστικά

Έννοιες: συνάρτηση, ποσότητες,
μεταβλητές, συναρτήσεις σε
ρεαλιστικά πλαίσια

Διαδικασίες: Γενίκευση,
περιγραφή, συλλογισμός, έλεγχος,
αναπαράσταση, ανάλυση

Τρόποι αναπαράστασης: λέξεις,
σύμβολα, πίνακες, γραφικές
παραστάσεις, διαγράμματα

Συναρτησιακός
λογισμός
και
αλγεβρική
σκέψη

Ο συναρτησιακός λογισμός αποτελεί μία από τις πέντε ενότητες περιεχομένου του μοντέλου του Karut (2005) για την πρώιμη άλγεβρα και βασική διάσταση του μοντέλου της Kieran (2017).

Συναρτησιακός λογισμός συστατικό της αλγεβρικής σκέψης

Vs

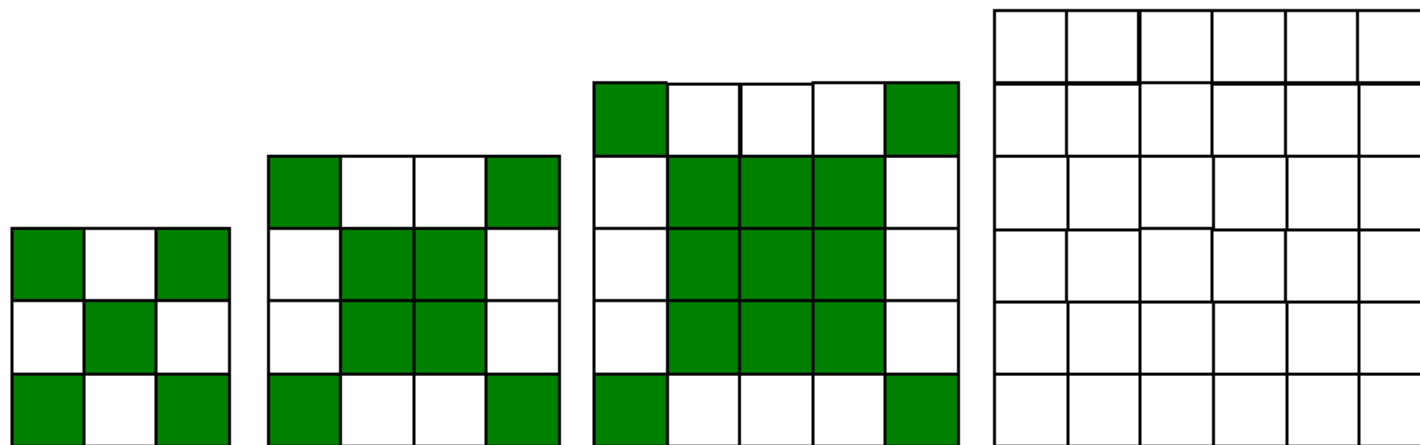
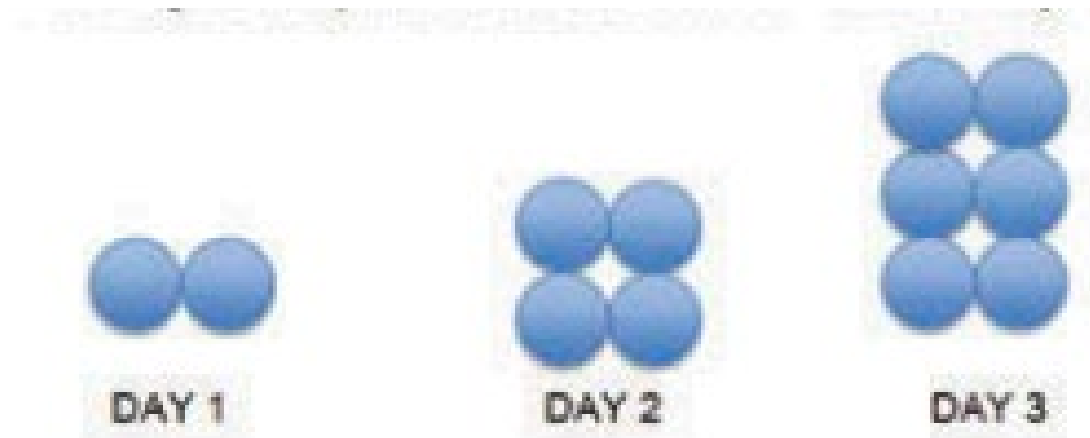
Συναρτησιακός λογισμός ευρύτερη ικανότητα στην οποία συμβάλει η αλγεβρική σκέψη

Ο στόχος του συναρτησιακού λογισμού είναι η εμπάθυνση της εννοιολογική κατανόησης των μαθητών και η ανάπτυξη της ικανότητας γενίκευσης

Τρόποι προσέγγισης προβλημάτων που εμπλέκουν συναρτησιακές σχέσεις (Confrey & Smith, 1995)

- **Αναδρομικός συλλογισμός:** κάθε επόμενος όρος σε σχέση με τον προηγούμενο (επικέντρωση στην εξαρτημένη μεταβλητή). Αναζήτηση κανονικοτήτων (Kieran, 2018).
- **Αντιστοίχιση:** επικέντρωση στη σχέση μεταξύ των στοιχείων των δύο συνόλων και στην εύρεση ενός κανόνα που συνδέει κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής με την αντίστοιχη τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής, σχηματίζοντας μια αντιστοιχία μεταξύ της μεταβλητής x και της μεταβλητής y (Smith, 2008). Περιλαμβάνει, επίσης, τη χρήση του κανόνα για τον υπολογισμό απομακρυσμένων όρων, καθώς και για τον υπολογισμό της τιμής της μιας μεταβλητής, όταν δίνεται η αντίστοιχη τιμή της άλλης μεταβλητής.
- **Συμμεταβολή:** με ποιο τρόπο οι ποσότητες μεταβάλλονται ταυτόχρονα, συντονισμός της μεταβολής της μιας ποσότητας σε σχέση με τη μεταβολή της άλλης και κατανόηση του γεγονότος ότι ο κανόνας της συμμεταβολής είναι ο ίδιος για οποιεσδήποτε τιμές (Smith, 2008; Thompson & Carlson, 2017).

MACHINE D	
INPUT	OUTPUT
2	5
3	7
5	11
7	
10	



Σχέδιο 1

Σχέδιο 2

Σχέδιο 3

Σχέδιο 4

Παραδείγματα Απαντήσεων

MACHINE D	
INPUT	OUTPUT
2	5
3	7
5	11
7	13
10	15

MACHINE D	
INPUT	OUTPUT
2	5
3	7
5	11
7	
10	

- Complete the table.
- Describe the machine's rule.
- Find the output value if the symbol of a heart was entered.
- Find the input value, if the symbol of a diamond was presented at the exit.

MACHINE D	
INPUT	OUTPUT
2	5
3	7
5	11
7	
10	

$$5 \times 2 = 10$$

$$10 + 1 = 11$$

$$2 \xrightarrow{\times 2 = 4} 5$$

$$3 \xrightarrow{\times 2 = 6} 7$$

$$4 \xrightarrow{\times 2 = 8} 9$$

$$5 \xrightarrow{\times 2 = 10} 11$$

$$2 \times 2 = 4$$

$$3 \times 2 = 6$$

$$4 \times 2 = 8$$

$$\heartsuit \times 2 \longrightarrow + 1$$

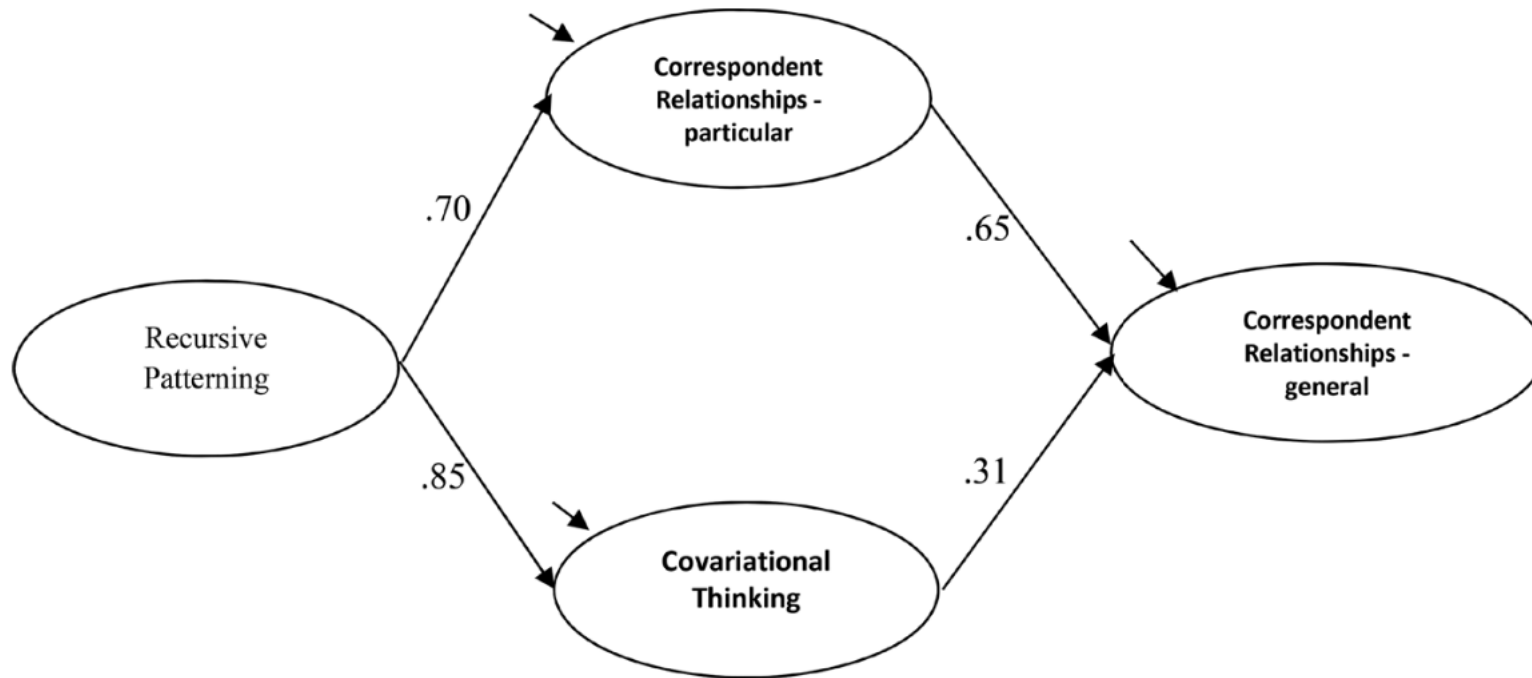
$$\diamond \times 2 \longrightarrow _ + 1 = \square$$

$$4 + 1 = 5$$

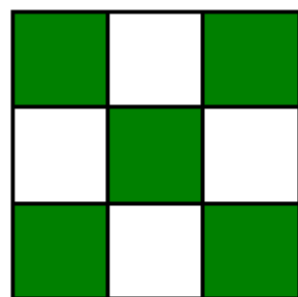
$$6 + 1 = 7$$

$$8 + 1 = 9$$

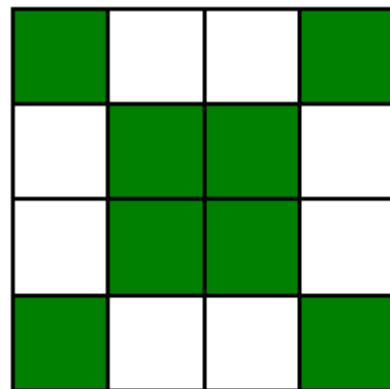
Σχέσεις μεταξύ τρόπων προσέγγισης



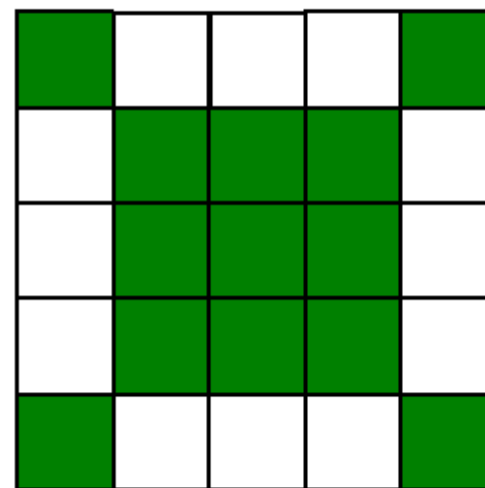
Να γράψετε ερωτήματα για το πιο κάτω μοτίβο. Ποιο τρόπος προσέγγισης εμπλέκει το κάθε ερώτημα;



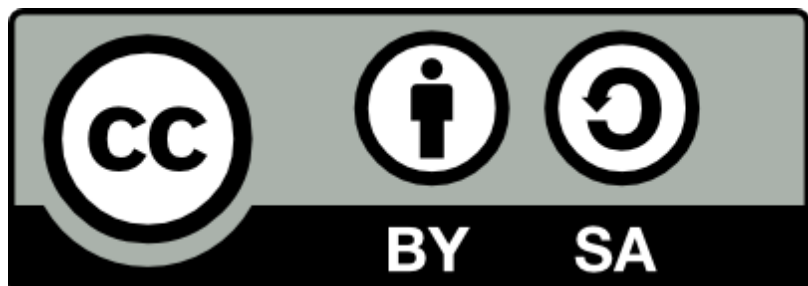
Σχέδιο 1



Σχέδιο 2



Σχέδιο 3



This material is provided by the [FunThink Team](#), responsible institution:
University of Cyprus

Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under a Creative Commons License ([CC BY-SA 4.0](#)). Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

Co-funded by the
Erasmus+ Programme
of the European Union



The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.

Επιμορφωτικό Σεμινάριο 4 Μοτίβα



<https://sites.google.com/view/seminarcy/home>

Μοτίβο

Είναι μια προβλεπόμενη κανονικότητα που περιλαμβάνει ένα σύνολο από χαρακτηριστικά ή σχέσεις που παραμένουν σταθερά μέσα σε ομάδες αριθμών, σχημάτων, μεγεθών ή άλλων μαθηματικών και μη καταστάσεων.

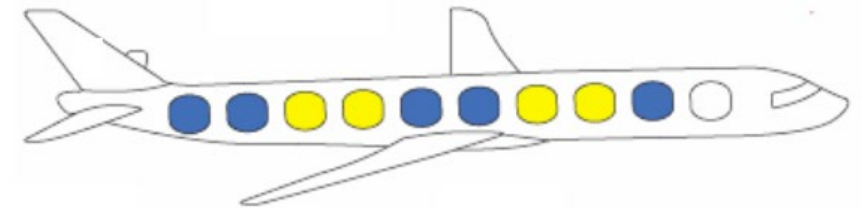
Η σχέση προσθέτω 1 σε ένα σύνολο (N), θα καταλήγει πάντοτε στο $N+1$ ανεξάρτητα από το αν το σύνολο είναι αρκουδάκια, τετραγωνάκια ή αριθμοί.

Κατηγοριοποίηση μοτίβων

- Δομή (μορφή, κανόνας)
 - ΑΒΑΒ..., ΑΒΓΑΒΓ..., 2,4,6,2,4,6,...
- Υλικό
 - Πραγματικό, εικονικό, συμβολικό
 - Λεκτικό
 - Ηχητικό
- Περιεχόμενο
 - Χρώμα, σχήμα, μέγεθος
- Εξέλιξη
 - Επαναλαμβανόμενο και αναπτυσσόμενο
 - Γραμμικό και κυκλικό

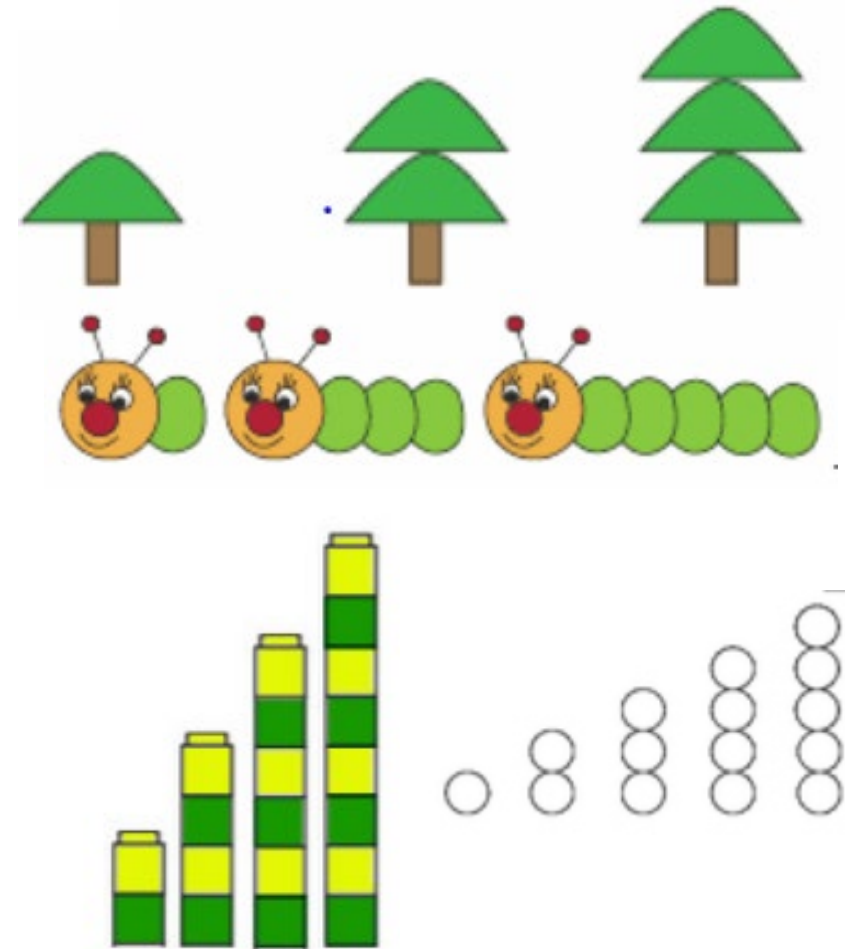
Μοτίβα

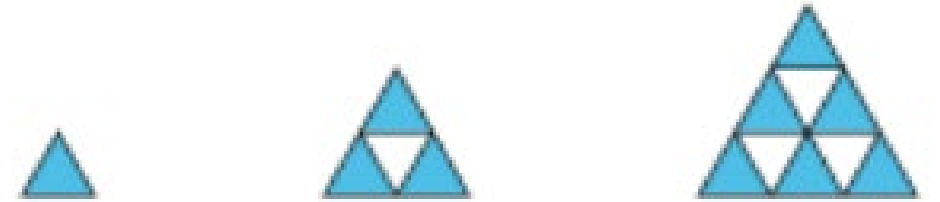
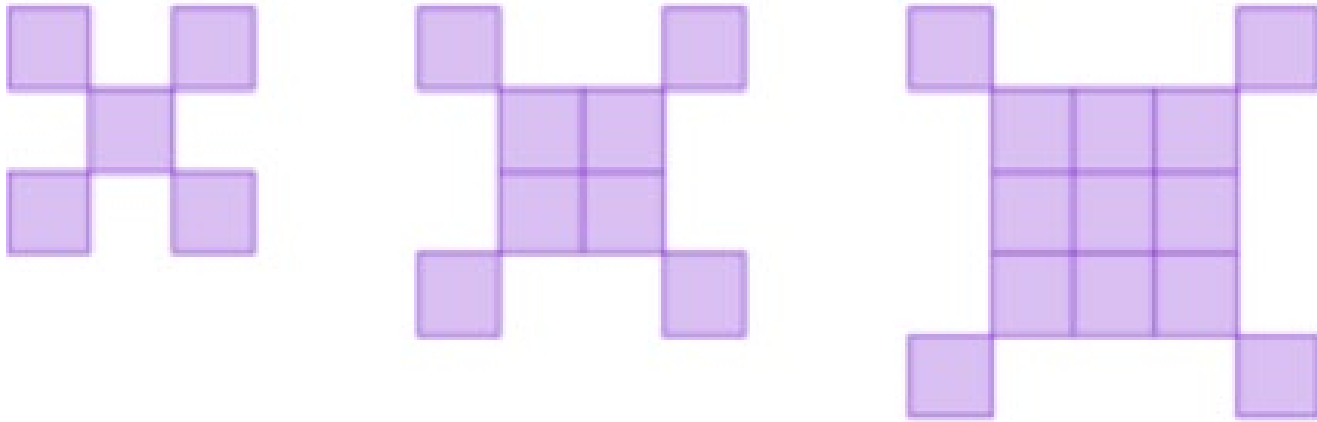
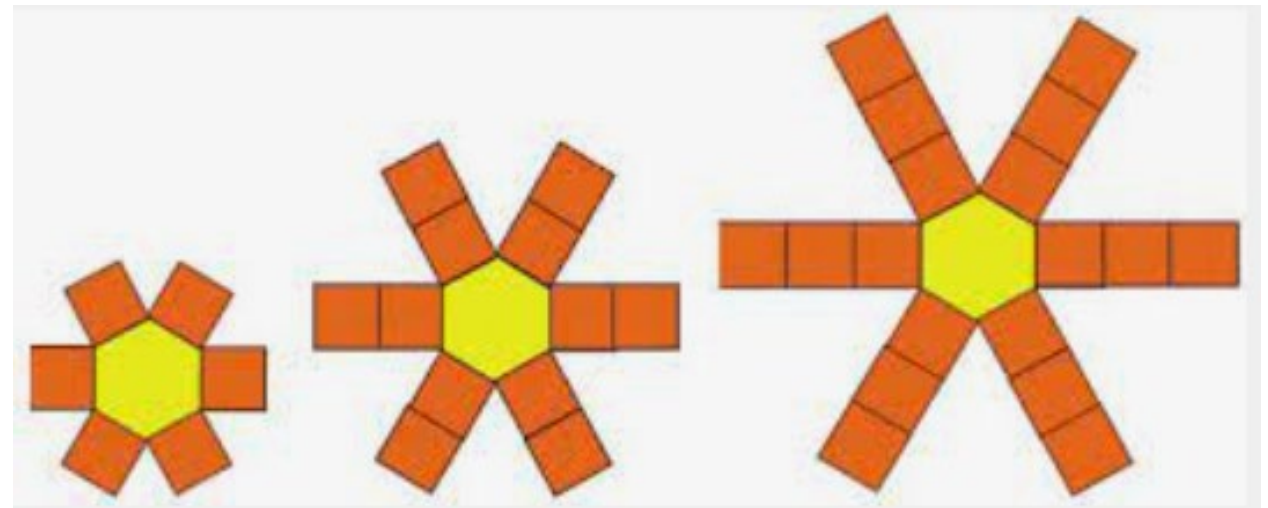
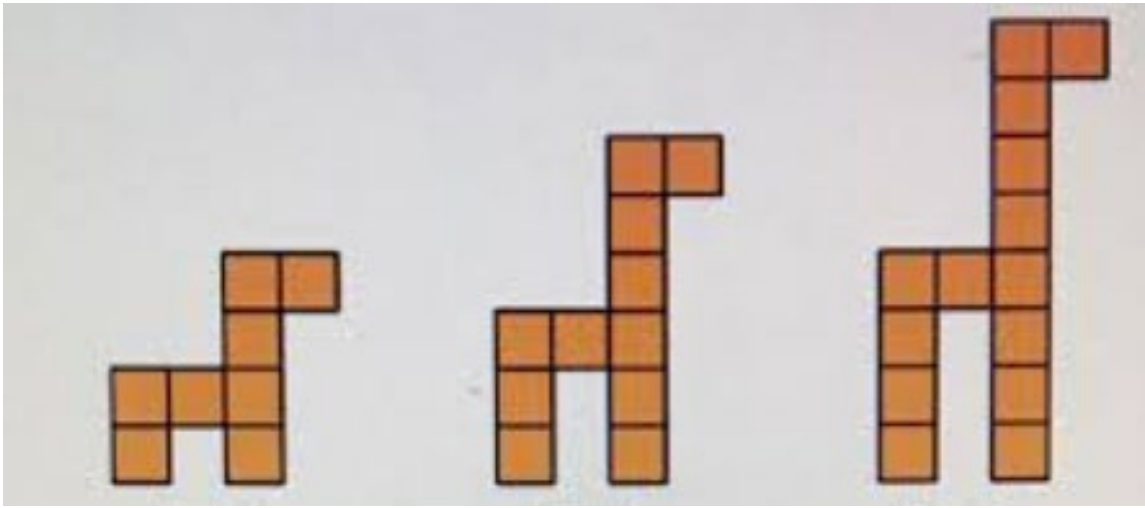
- Επαναλαμβανόμενα μοτίβα: Διακριτή μονάδα επανάληψης
 - Με σχήματα: κύκλος, τετράγωνο, κύκλος, τετράγωνο, ...
 - Με χρώματα: κόκκινο, μπλε, μπλε, κόκκινο, μπλε, μπλε, ...
 - Με ήχους: ντο, ρε, μι, ντο, ρε, μι, ...
 - Με διαφορετικά μεγέθη



Μοτίβα

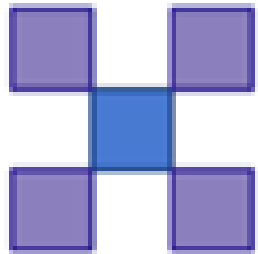
- Αναπτυσσόμενα μοτίβα: Αύξηση ή μείωση με συστηματικό τρόπο
 - 2, 4, 6, 8, ...



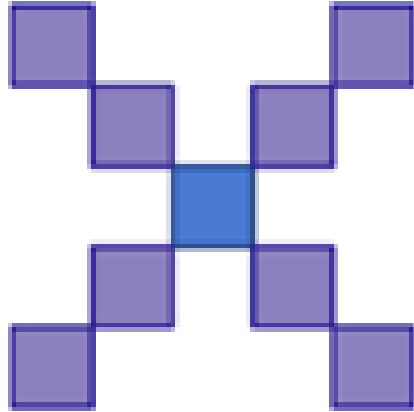


Δραστηριότητες για...

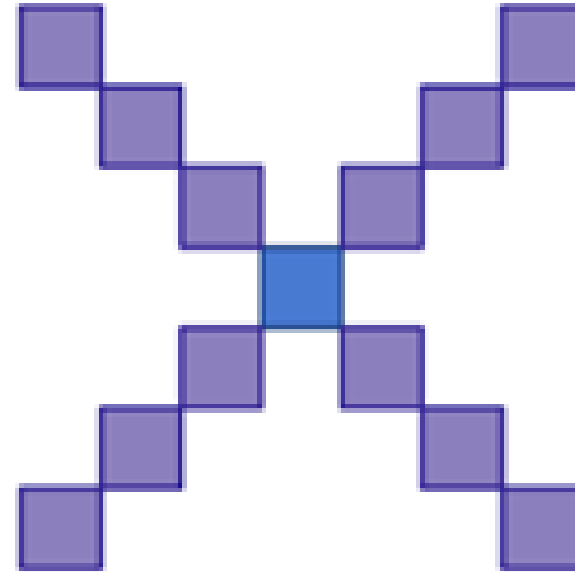
- Παρατήρηση κανονικότητας
- Αναγνώριση και περιγραφή μοτίβου
- Επέκταση μοτίβου
- Συμπλήρωση μοτίβου
- Διόρθωση μοτίβου
- Μετάφραση μοτίβου
- Κατασκευή μοτίβου
- Γενίκευση μοτίβου



Σχήμα 1



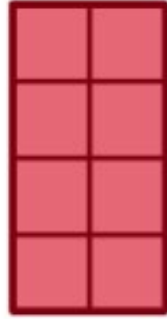
Σχήμα 2



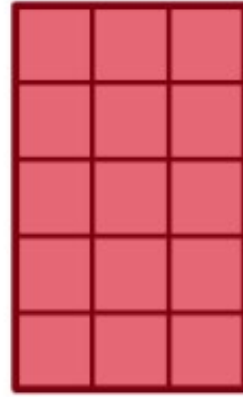
Σχήμα 3



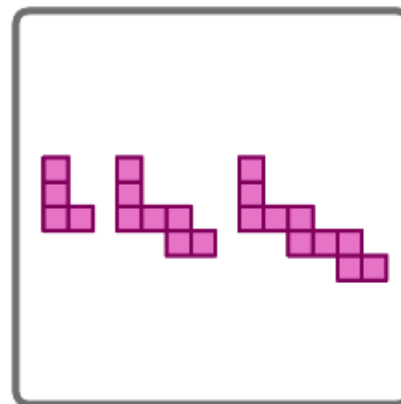
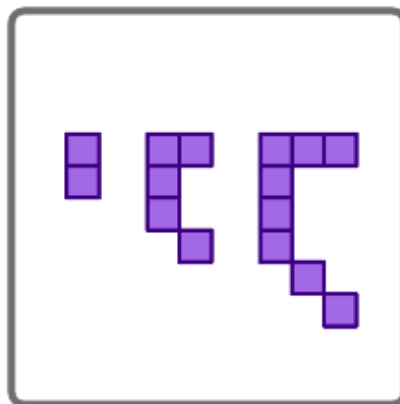
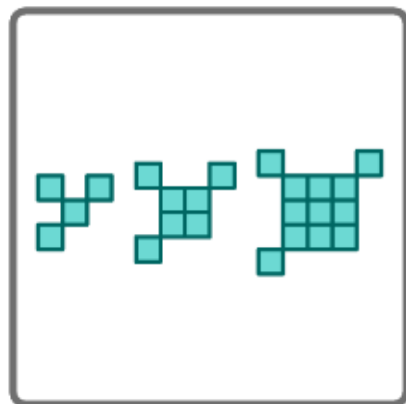
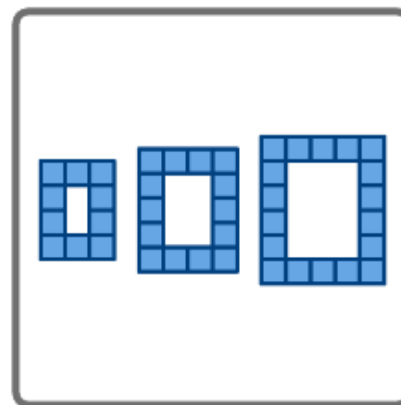
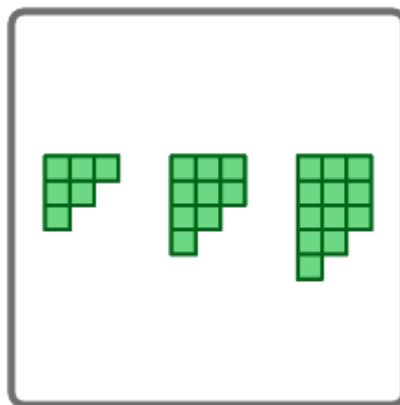
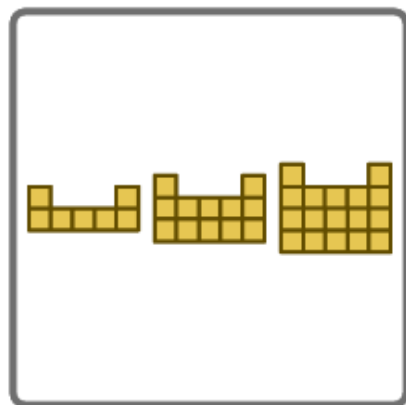
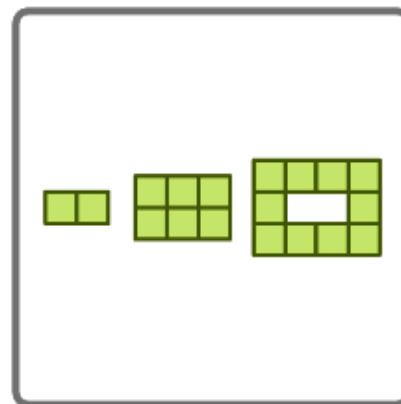
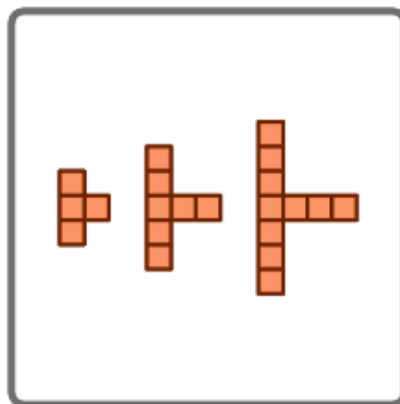
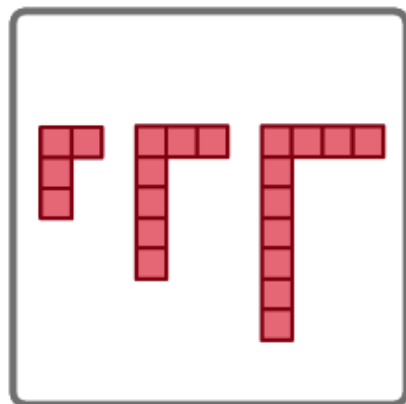
$$s = 1$$



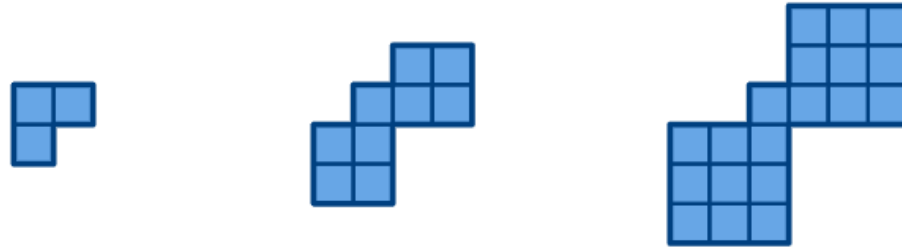
$$s = 2$$



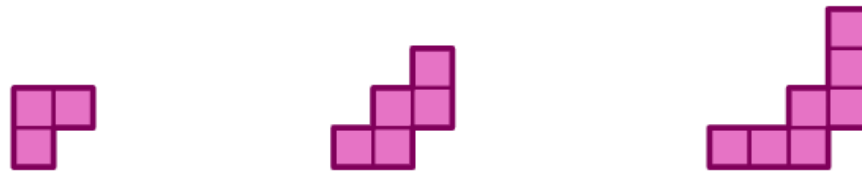
$$s = 3$$



Pattern A



Pattern B



[Revisiting Visual Patterns, Part 2 • Activity Builder by Desmos](#)