

This material is provided by the [FunThink Team](#), responsible institution:  
Utrecht University

Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under a Creative Commons License ([CC BY-SA 4.0](#)). Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Utrecht University

# **Functies en functioneel denken**

## **Dag 1**

**Rogier Bos**

**Hang Wei**

**7-3-2023**



# Functies en Functioneel denken

- 1. Theorie Functies**
- 2. Theorie herkennen in design**
- 3. Representaties van functies**
- 4. Representaties in opgaven**
- 5. Afronding**

# Welke functies zijn gerepresenteerd?





# De notie van functies

**Freudenthal (1983, p. 496) over functie:  
“the directedness from something that  
varies freely to something that varies  
under constraint.”**

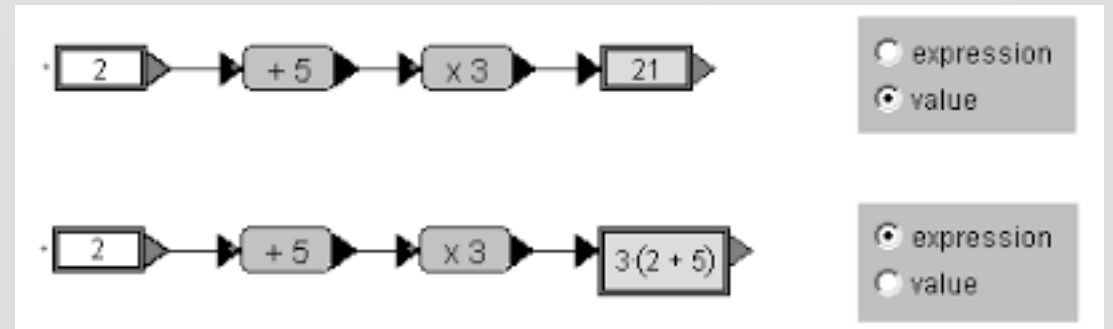
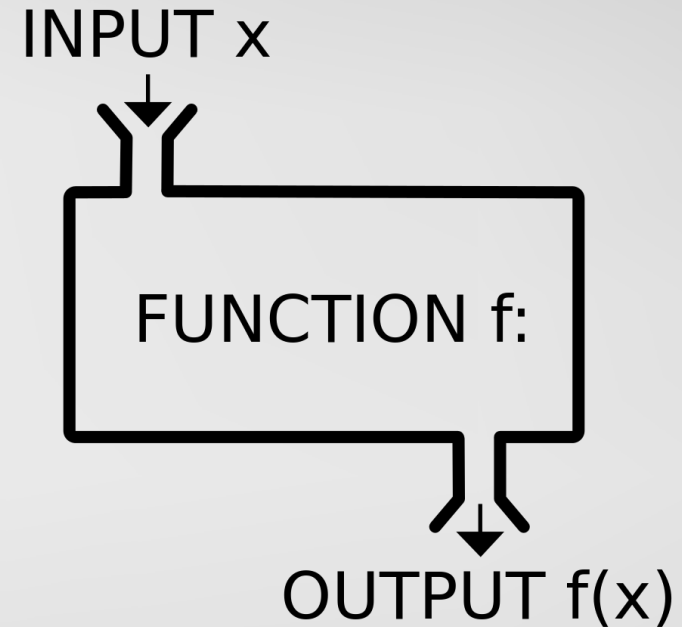
**Latijn: fungor = “I work”**



# Functioneel denken

Vier aspecten:

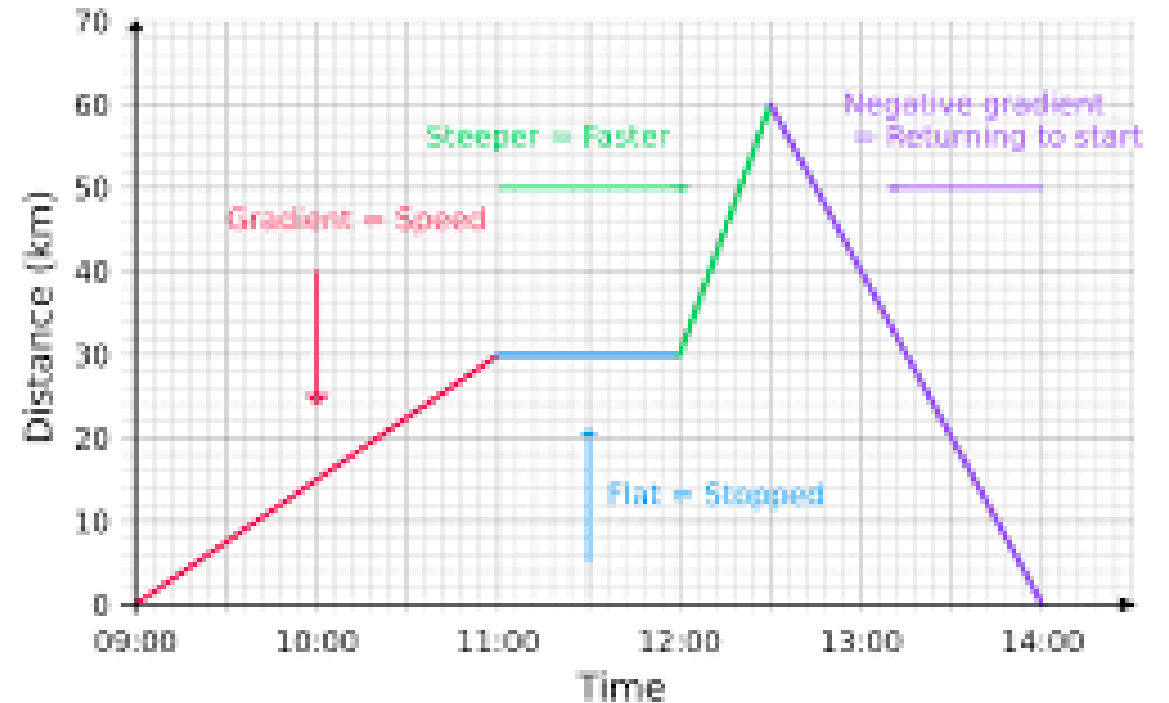
- **Input-output machine**
- **Dynamische covariatie**
- **Correspondentie relatie**
- **Wiskundig object**



# Functioneel denken

## Four aspects:

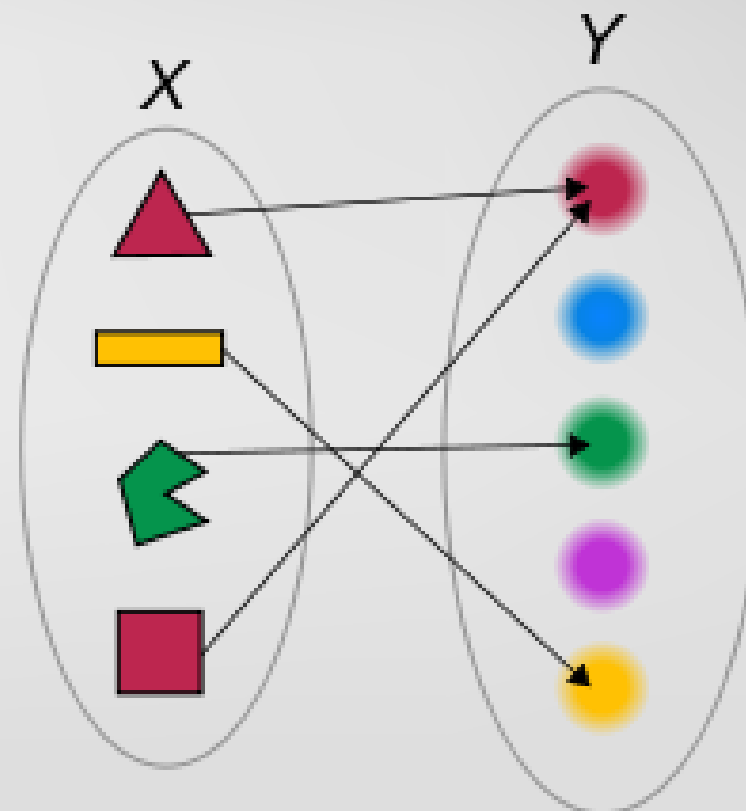
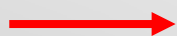
- **Input-output machine**
- **Dynamische covariatie**
- **Correspondentierelatie**
- **Wiskundig object**



# Kijk op functies

## Vier aspecten:

- **Input-output machientje**
- **Dynamische covariatie**
- **Correspondentierelatie**
- **Wiskundig object**

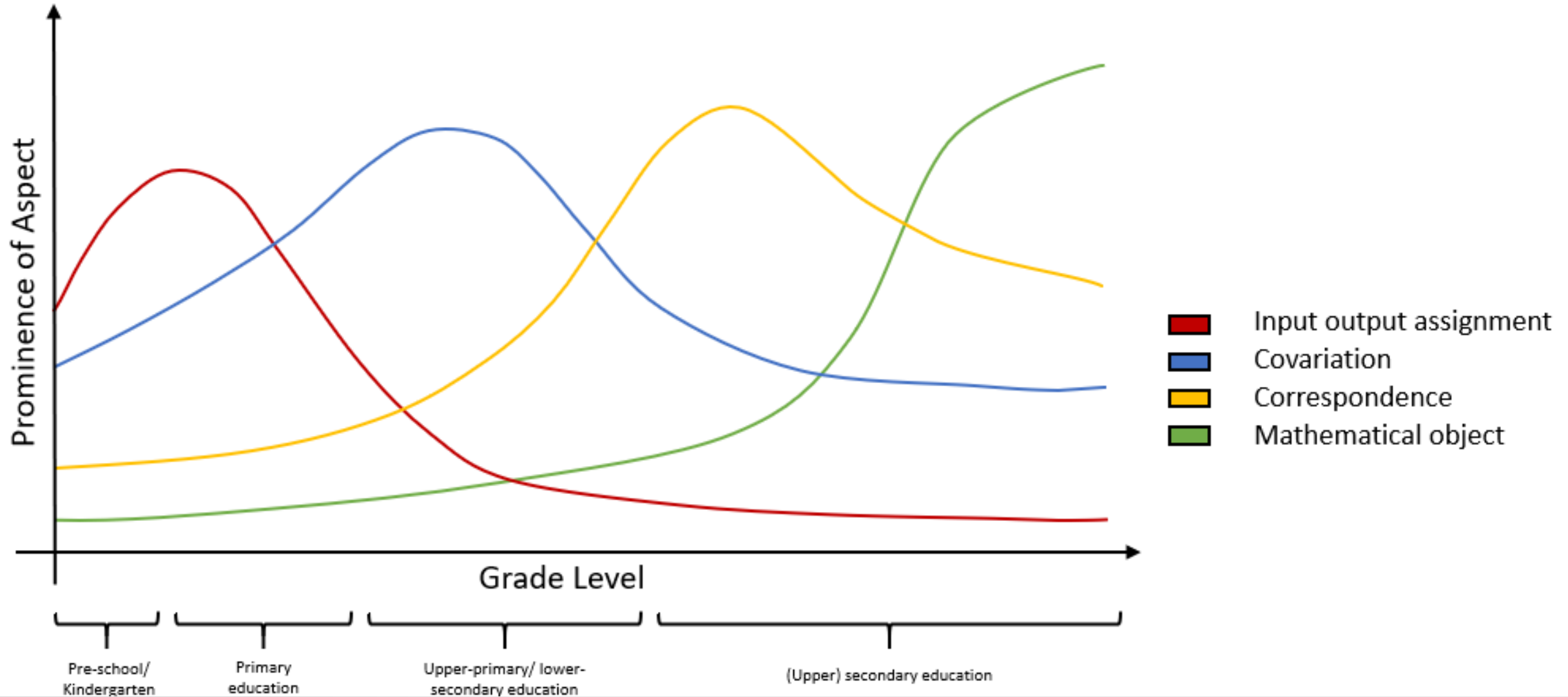


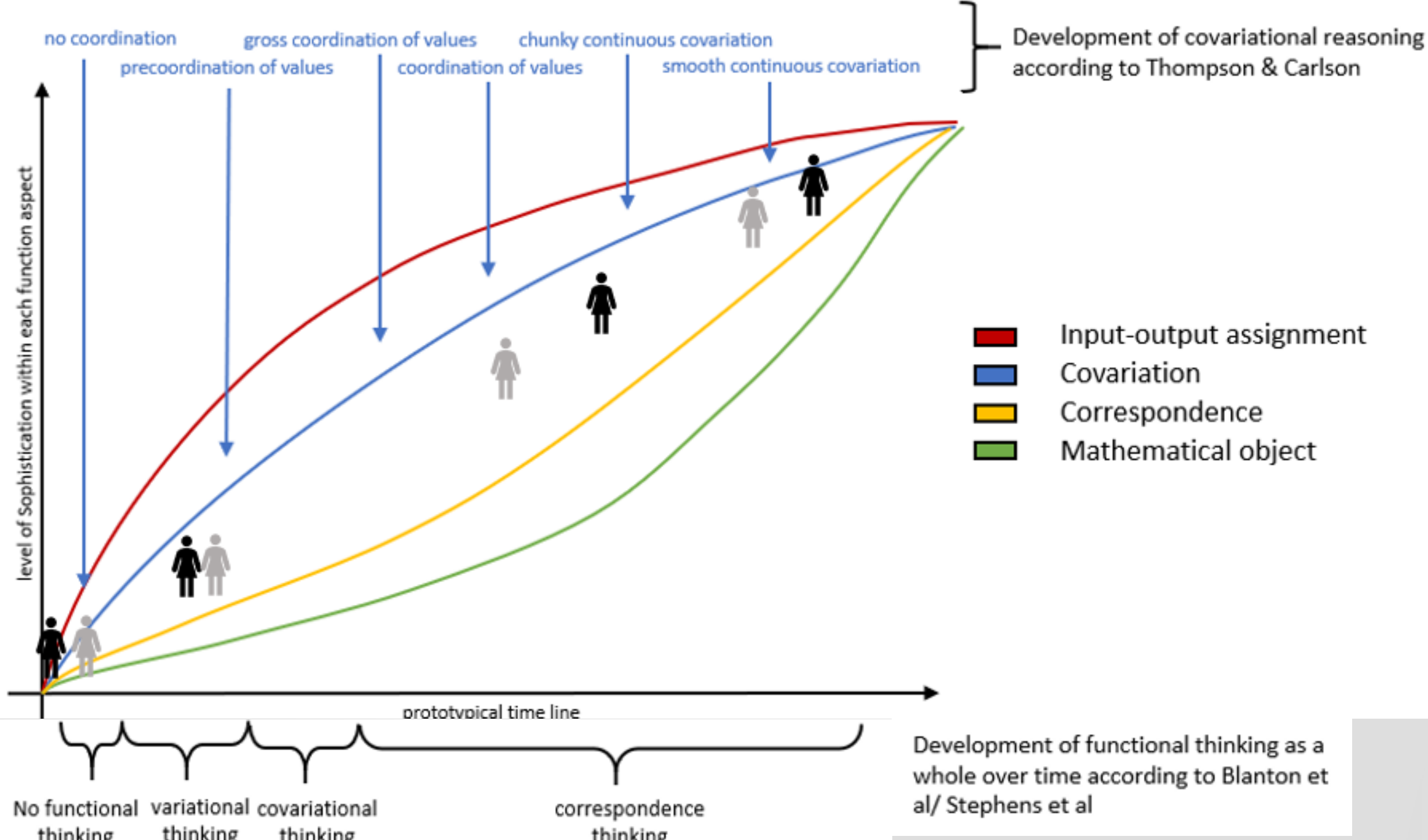
# Kijk op functies

## Vier aspecten:

- **Input-output machientje**
- **Dynamische covariatie**
- **Correspondentierelatie**
- • **Wiskundig object**

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$





# **Functioneel denken...**

**... is denken in termen van relaties, afhankelijkheden, en verandering**

**... is het process van beschrijven, bouwen en redeneren met en over functies, met de vier eerdergenoemde perspectieven**





# Functies en Functioneel denken

1. Theorie Functies
2. Theorie herkennen in design
3. Representaties van functies
4. Representaties in opgaven
5. Afronding

# **Hang WEI's "embodied design" voor functie (1)**

**Het idee van embodiment / belichaming:**

- **Alle kennis / cognitie is geworteld in fysieke ervaring, in afwisseling van actie en waarneming.**
- **Zeg maar "wiskunde in de vingers"**
- **Nieuwe ICT-middelen bieden daarvoor mogelijkheden**

# Hang WEI's "embodied design" voor functie (2)

**Opdracht:** ga nog eens door de eerste twee units van Hang:

- <https://app.dwo.nl/embod/?responsive=true&locale=en&profile=108&hash=%23s%3A706362#s:706362>
- <https://app.dwo.nl/embod/?responsive=true&locale=en&profile=108&hash=%23s%3A706405#s:706405>



Zoek bij elk van de vier functieaspecten een item dat bij uitstek daarbij past. Schrijf op!



10-15 minuten

In tweetallen

Daarna: klassikale uitwisseling

**Vier aspecten:**

- **Input-output machientje**
- **Dynamische covariatie**
- **Correspondentierelatie**
- **Wiskundig object**

# Wrap up

## Vier aspecten:

- **Input-output machientje**
- **Dynamische covariatie**
- **Correspondentierelatie**
- **Wiskundig object**

## Voorbeeld item:

- 
- 
- 
-

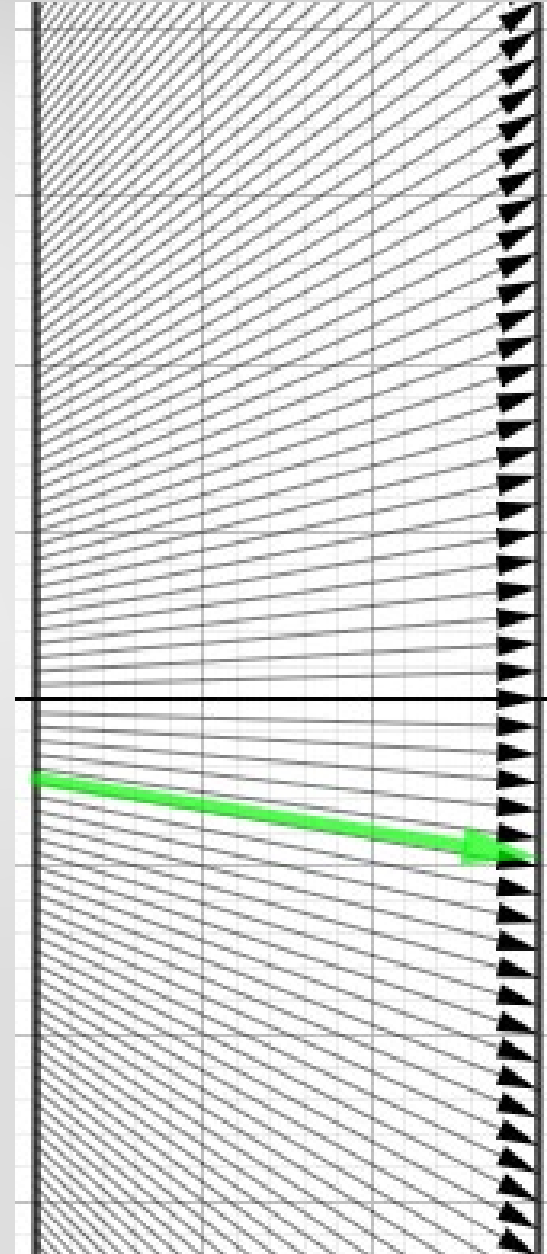


# Functies en Functioneel denken

- 1. Theorie Functies**
- 2. Theorie herkennen in design**
- 3. Representaties van functies**
- 4. Representaties in opgaven**
- 5. Afronding**

# Functies voorstellen

- Natuurlijke taal
- Formules
- Tabellen
- • **Nomogrammen**
- Grafieken
- Kettingen van machientjes



# Funcities voorstellen

**Representation is a crucial element for a theory of mathematics teaching and learning, not only because the use of symbolic systems is so important in mathematics, the syntax and semantics of which are rich, varied, and universal but also for two strong reasons: (a) mathematics plays an essential part in conceptualizing the real world, (b) mathematics makes a wide use of homomorphism in which the reduction of structures to another is essential (Vergnaud, 1987, p.227)**

Begripsproblemen met  
*conversie*: overgang/relaties  
tussen representaties

# Functies voorstellen

tabel 3.1 Overgangen tussen functierepresentaties (naar Janvier 1987)

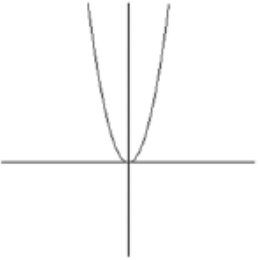
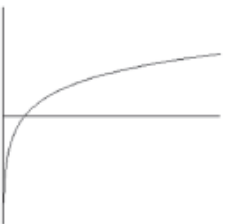
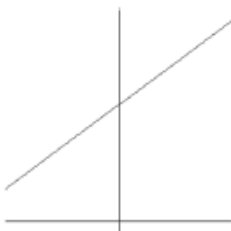
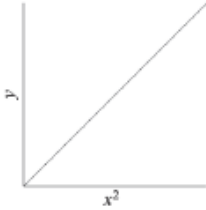

| naar \ van                    | 1. verbaal    | 2. numeriek               | 3. grafisch              | 4. analytisch/<br>algebraïsch        |
|-------------------------------|---------------|---------------------------|--------------------------|--------------------------------------|
| 1. verbaal                    | herformuleren | uitrekenen<br>tabel maken | schets maken             | formaliseren<br>modelleren           |
| 2. numeriek                   | interpreteren | doorrekenen               | tekenen grafiek          | opstellen formule of<br>vergelijking |
| 3. grafisch                   | interpreteren | aflezen                   | uitbreiden<br>combineren | benaderen met een<br>formule         |
| 4. analytisch/<br>algebraïsch | interpreteren | berekenen                 | schets maken             | herleiden                            |



# Functies kwartetten

Of representaties matchen,  
zie Handboek p.105

tabel 3.3 Matchingsopgave: zoek vier bij elkaar passende kaartjes

|   |   |   |     |     |     |      |      |   |   |     |    |    |     |     |     |      |      |  |
|---|---|---|-----|-----|-----|------|------|---|---|-----|----|----|-----|-----|-----|------|------|--|
| context:<br>'gelijkmatige groei'  |   | $y = 4x^3$  |     |     |     |      |      |   |   |     |    |    |     |     |     |      |      |  |
| context:<br>'als $x$ 3 keer zo groot wordt, dan wordt $y$ 27 keer zo groot' | context: 'als $x$ 2 keer zo groot wordt dan wordt $y$ 4 keer zo groot'  | context: 'steeds een vast percentage erbij'   |     |     |     |      |      |   |   |     |    |    |     |     |     |      |      |  |
| $y = 3x^2$  | <table border="1" data-bbox="1719 478 2140 535"> <tbody> <tr> <td><math>x</math></td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td></td> <td>8</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td><math>y</math></td> <td>4</td> <td>32</td> <td>108</td> <td>256</td> <td></td> <td>2048</td> <td>2916</td> </tr> </tbody> </table> | $x$   | 1   | 2   | 3   | 4    |      | 8 | 9 | $y$ | 4  | 32 | 108 | 256 |     | 2048 | 2916 | context: 'als $x$ 2 keer zo groot wordt, dan wordt $y$ 8 keer zo groot.                        |
| $x$   | 1   | 2   | 3   | 4   |     | 8    | 9    |   |   |     |    |    |     |     |     |      |      |  |
| $y$   | 4   | 32  | 108 | 256 |     | 2048 | 2916 |   |   |     |    |    |     |     |     |      |      |  |
| $y = {}^2\log(x)$   | <table border="1" data-bbox="1719 585 2140 642"> <tbody> <tr> <td><math>x</math></td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td><math>y</math></td> <td>83</td> <td>89</td> <td>95</td> <td>101</td> <td>107</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>     | $x$   | 0   | 1   | 2   | 3    | 4    | 5 | 6 | $y$ | 83 | 89 | 95  | 101 | 107 |      |      | context: 'als $x$ met eenzelfde getal vermenigvuldigd wordt, neemt $y$ met een vast getal toe. |
| $x$   | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5    | 6    |   |   |     |    |    |     |     |     |      |      |  |
| $y$   | 83  | 89  | 95  | 101 | 107 |      |      |   |   |     |    |    |     |     |     |      |      |  |
| $y = 12 \cdot 3^x$  | <table border="1" data-bbox="1719 685 2140 742"> <tbody> <tr> <td><math>x</math></td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td></td> <td>6</td> <td>8</td> </tr> <tr> <td><math>y</math></td> <td>0</td> <td>1</td> <td></td> <td>2</td> <td></td> <td></td> <td>3</td> </tr> </tbody> </table>              | $x$   | 1   | 2   | 3   | 4    |      | 6 | 8 | $y$ | 0  | 1  |     | 2   |     |      | 3    |             |
| $x$   | 1   | 2   | 3   | 4   |     | 6    | 8    |   |   |     |    |    |     |     |     |      |      |  |
| $y$   | 0   | 1   |     | 2   |     |      | 3    |   |   |     |    |    |     |     |     |      |      |  |
| $y = 83 + 6x$   | <table border="1" data-bbox="1719 942 2140 999"> <tbody> <tr> <td><math>x</math></td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td><math>y</math></td> <td>12</td> <td>36</td> <td>108</td> <td>324</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>       | $x$   | 0   | 1   | 2   | 3    | 4    | 5 | 6 | $y$ | 12 | 36 | 108 | 324 |     |      |      |            |
| $x$   | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5    | 6    |   |   |     |    |    |     |     |     |      |      |  |
| $y$   | 12  | 36  | 108 | 324 |     |      |      |   |   |     |    |    |     |     |     |      |      |  |
| $y = 4x^3$  |    |  |     |     |     |      |      |   |   |     |    |    |     |     |     |      |      |  |



# Functies en Functioneel denken

- 1. Theorie Functies**
- 2. Theorie herkennen in design**
- 3. Representaties van functies**
- 4. Representaties in opgaven**
- 5. Afronding**

# Functies opgaven

## **Opdracht:**

Zoek/maak één of meer problemen voor onderbouwleerlingen die worden opgelost met behulp van functioneel denken, maar in een andere presentatie dan waarin gesteld.

In twee- of drietallen

Bij de whiteboards

10 minuten

Daarna: presentatie aan elkaar



# Functies en Functioneel denken

- 1. Theorie Functies**
- 2. Theorie herkennen in design**
- 3. Representaties van functies**
- 4. Representaties in opgaven**
- 5. Afronding**



This material is provided by the [FunThink Team](#), responsible institution:  
Utrecht University

Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under a Creative Commons License ([CC BY-SA 4.0](#)). Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



Utrecht University

# **Functies en functioneel denken**

## **Dag 2**

**Rogier Bos**

## Wat is functioneel denken (ook alweer?)

### **Functioneel denken...**

**... is denken in termen van relaties, afhankelijkheden, en verandering**

**... is het process van beschrijven, bouwen en redeneren met en over functies, met de perspectieven:**

**Input-output**

**Dynamische covariatie**

**Correspondentierelatie**

**Wiskundig object**

### **Representaties**

Natuurlijke taal

Formules

Tabellen

Nomogrammen

Grafieken

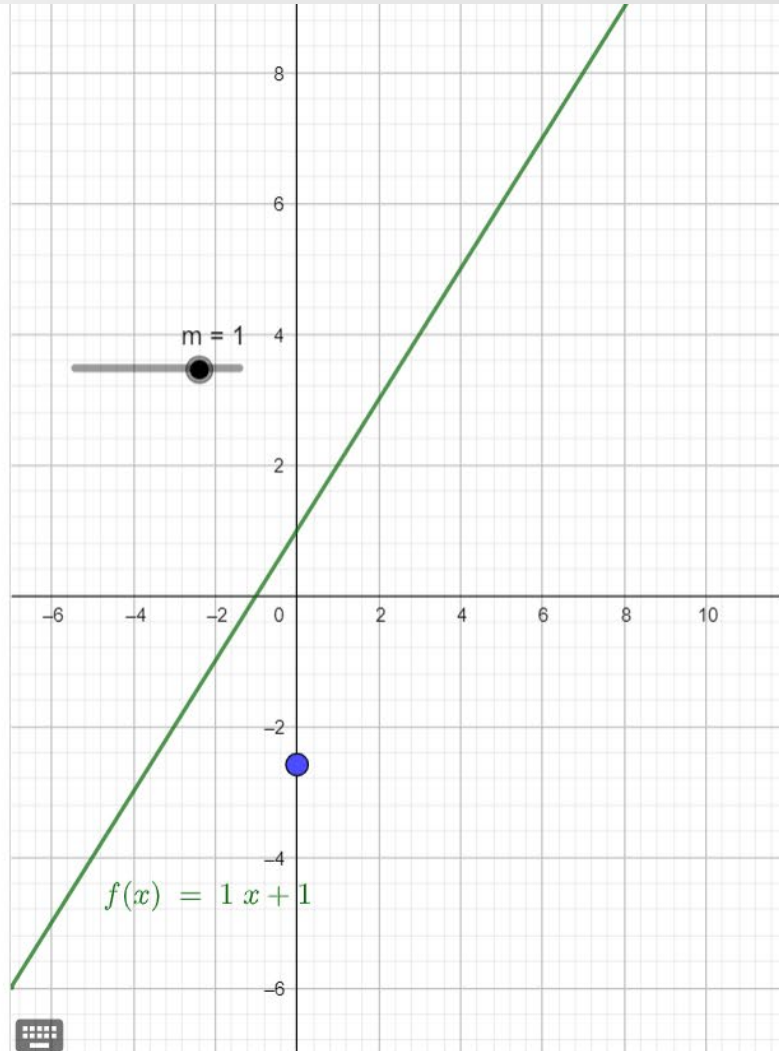
Kettingen van  
machientjes



|            |                    |               |
|------------|--------------------|---------------|
| verre punt | punt in het midden | dichtbij punt |
|------------|--------------------|---------------|

**Ga naar het begin.**  
 Als u uw twee handen weer opsteekt,  
 begint de functierun.

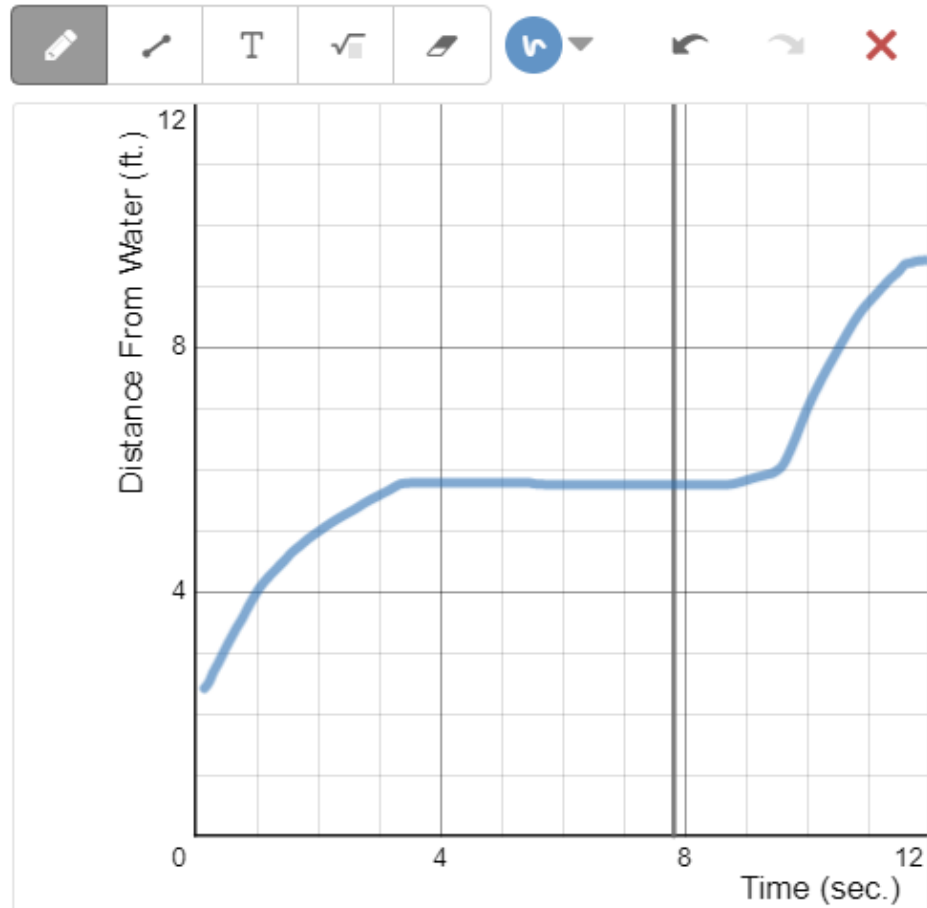
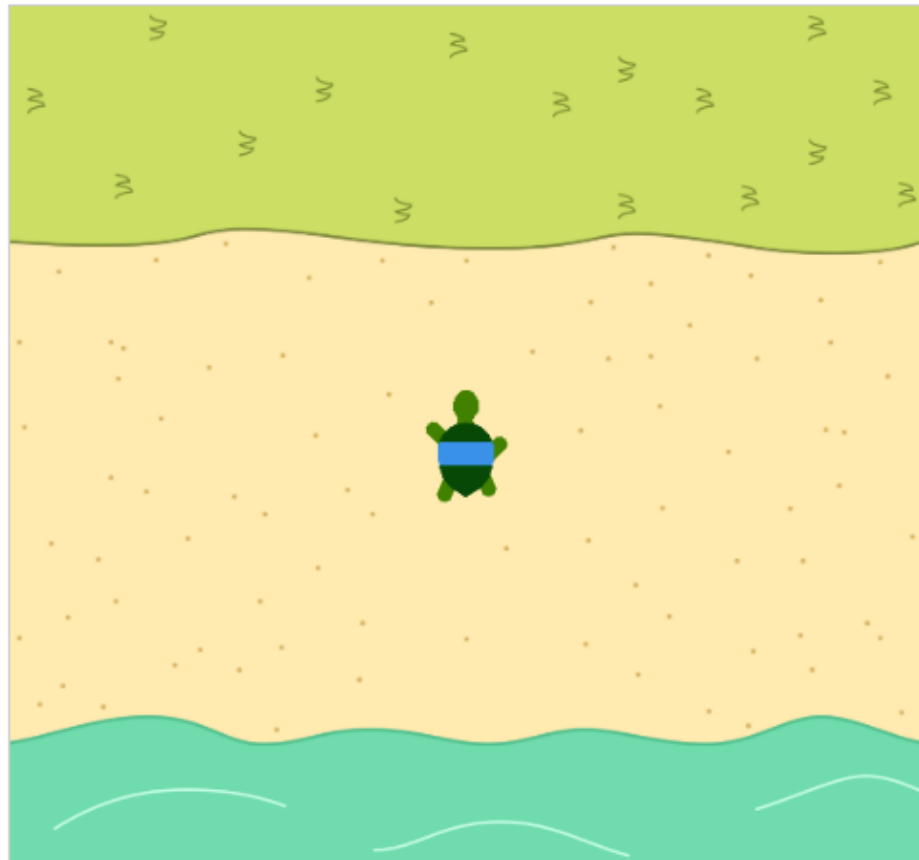
ren weer



|     |      |       |
|-----|------|-------|
| 170 | 5.8  | -2.73 |
| 177 | 6.35 | -2.53 |
| 178 | 6.35 | -2.53 |
| 179 | 6.4  | -2.53 |
| 180 | 6.4  | -2.71 |
| 181 | 6.95 | -2.73 |
| 182 | 6.95 | -2.73 |
| 183 | 7    | -2.73 |
| 184 | 7    | -2.78 |
| 185 | 7.55 | -2.68 |
| 186 | 7.55 | -2.68 |
| 187 | 7.6  | -2.68 |
| 188 | 7.6  | -2.74 |
| 189 | 8.15 | -2.68 |
| 190 | 8.15 | -2.68 |
| 191 | 8.2  | -2.68 |
| 192 | 8.2  | -2.72 |
| 193 | 8.75 | -2.61 |
| 194 | 8.75 | -2.61 |
| 195 | 8.8  | -2.61 |
| 196 | 8.8  | -2.61 |
| 197 | 9.35 | -2.72 |
| 198 | 9.35 | -2.72 |
| 199 | 9.4  | -2.72 |
| 200 | 9.4  | -2.72 |
| 201 | 9.95 | -2.7  |
| 202 | 9.95 | -2.7  |
| 203 | 10   | -2.7  |
| 204 |      |       |



Draw a distance vs. time graph to represent a turtle's journey across the sand. Then press play.



# Examenprogramma: meetkundig en functioneel denken

## Subdomein B3 Functies en grafieken

De kandidaat kan functievoorschriften opstellen, bewerken, combineren, de bijbehorende grafieken tekenen en aan de hand van een functievoorschrift zonder hulpmiddelen kwalitatieve uitspraken doen over de functie en haar grafiek.

### *Parate vaardigheden*

De kandidaat kan:

1. op een grafiek een translatie en/of vermenigvuldiging ten opzichte van  $x$ - of  $y$ -as uitvoeren;
2. het functievoorschrift opstellen dat hoort bij een nieuwe grafiek die is ontstaan na translatie en/of vermenigvuldiging ten opzichte van  $x$ - of  $y$ -as van een gegeven grafiek;
3. de samenhang tussen een translatie en/of vermenigvuldiging ten opzichte van  $x$ - of  $y$ -as van een grafiek en de verandering van het bijbehorende functievoorschrift gebruiken;

## Subdomein E2 Algebraïsche methoden in de vlakke meetkunde

### *Parate vaardigheden*

De kandidaat kan:

1. de afstand tussen punten, lijnen en cirkels berekenen;
2. de hoek tussen twee lijnen berekenen;
3. de vergelijking of de parametervoorstelling van een lijn opstellen;
4. de vergelijking of de parametervoorstelling van een cirkel opstellen;
5. uit de vergelijking van een cirkel de straal van de cirkel en de coördinaten van het middelpunt afleiden;
6. vanuit een parametervoorstelling van een lijn of cirkel een vergelijking opstellen en vanuit een gegeven vergelijking van een lijn of cirkel een parametervoorstelling opstellen;
7. de coördinaten van de snijpunten van twee lijnen, van twee cirkels en van een lijn en een cirkel berekenen;
8. de oplosbaarheid van een stelsel van twee lineaire vergelijkingen in verband brengen met de onderlinge ligging van rechte lijnen in het platte vlak;
9. onderzoeken hoeveel gemeenschappelijke punten een lijn en een cirkel hebben;
10. de vergelijking van een raaklijn met gegeven richting aan een cirkel opstellen;
11. de vergelijking van een raaklijn door een gegeven punt (op of buiten de cirkel) aan een cirkel opstellen.

### *Productieve vaardigheden*

De kandidaat kan:

12. het verband gebruiken tussen een transformatie van een lijn of een cirkel en een substitutie in de bijhorende vergelijking of parametervoorstelling;
13. meetkundige problemen oplossen met gebruikmaking van bovengenoemde algebraïsche technieken.

Algebra/functies



Meetkunde

Misschien wel het belangrijkste leerdoel: interactie tussen twee wiskundige velden