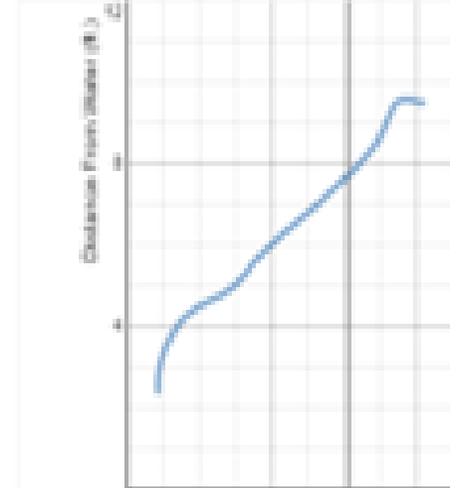
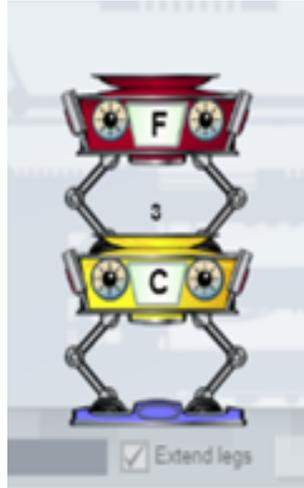


This material is provided by the [FunThink Team](#).  
Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under a Creative Commons License ([CC BY-SA 4.0](#)). Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



## Lehrkräftefortbildung (6h) – 1. Teil

Ort (ergänzen)

Datum (ergänzen)

# Funktionen und funktionales Denken

- **Was ist funktionales Denken?**
- **Die Theorie im Design (einer Lernumgebung)**
- **Die Funktion hat viele Gesichter**
- **Funktionales Denken im eigenen Klassenzimmer**

# Funktionen und funktionales Denken

- **Was ist funktionales Denken?**
- Die Theorie im Design (einer Lernumgebung)
- Die Funktion hat viele Gesichter
- Funktionales Denken im eigenen Klassenzimmer

# Arbeitsauftrag A: Welcher Funktion sehen Sie?



# Funktionen

**Freudenthal (1983, p. 496) about function:  
“the directedness from something that varies  
freely to something that varies under  
constraint.”**

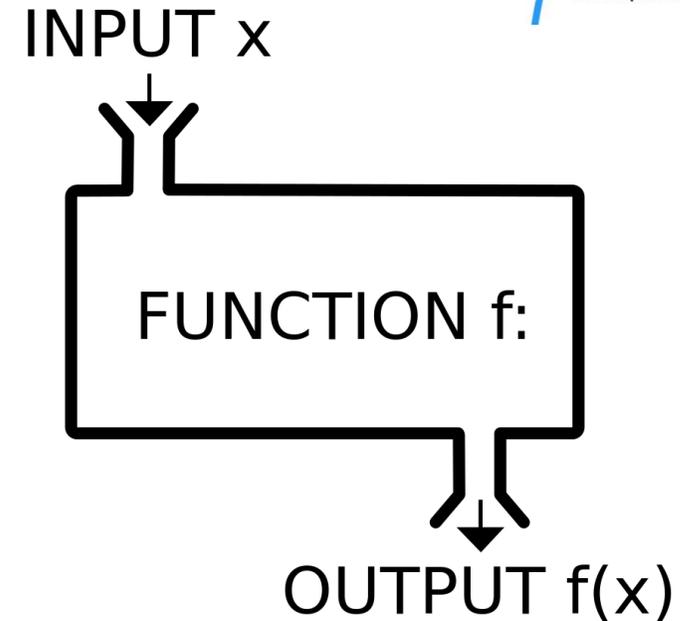


Source: <https://www.uu.nl/en/research/freudenthal-institute/about-us/background/mathematics-education>

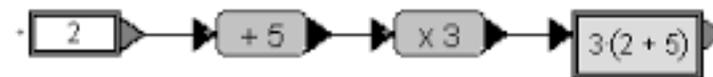
# Grundvorstellungen

▪ 4 Aspekte:

- • **Input-output-Vorstellung**
- **Kovariationsvorstellung**
- **Zurodnungsvorstellung**
- **Objekt-Vorstellung**



- expression
- value

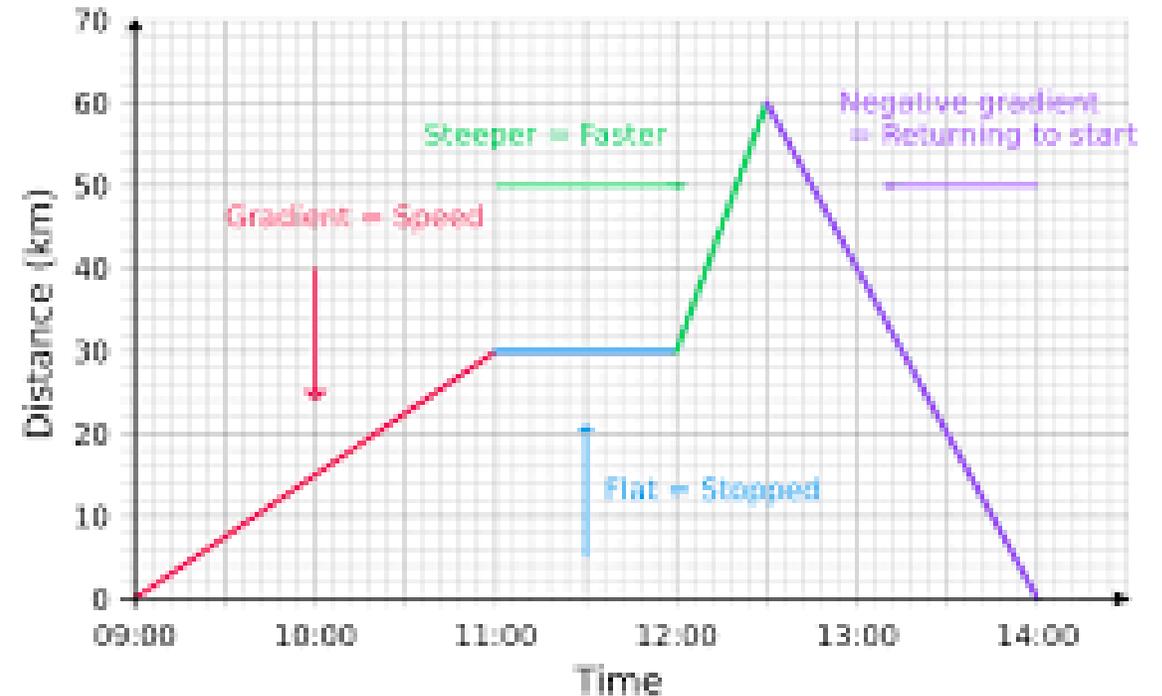


- expression
- value

# Grundvorstellungen

▪ 4 Aspekte:

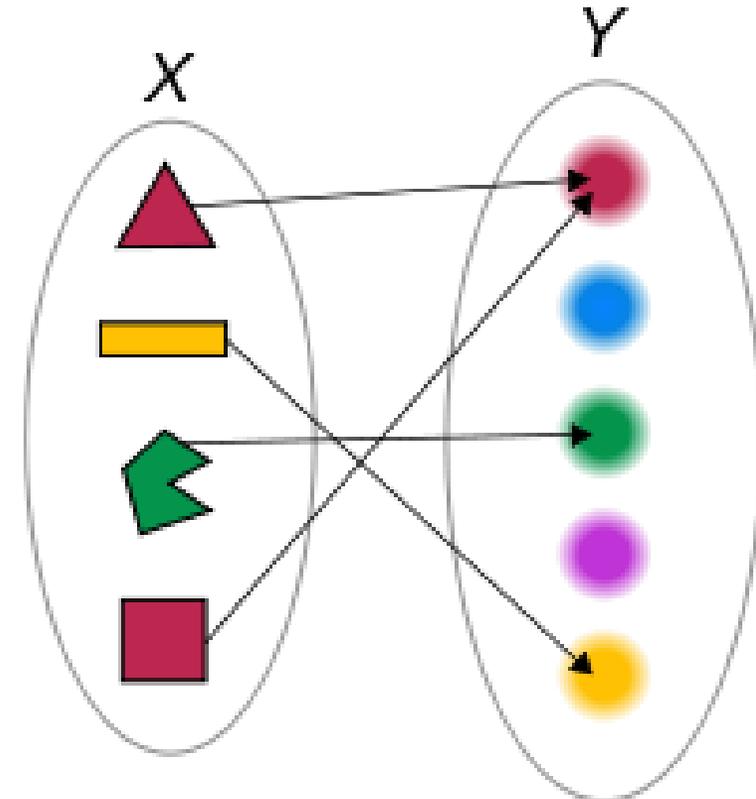
- **Input-output-Vorstellung**
- **Kovariationsvorstellung**
- **Zuordnungsvorstellung**
- **Objekt-Vorstellung**



# Grundvorstellungen

▪ 4 Aspekte:

- **Input-output-Vorstellung**
- **Kovariationsvorstellung**
- • **Zuordnungsvorstellung**
- **Objekt-Vorstellung**



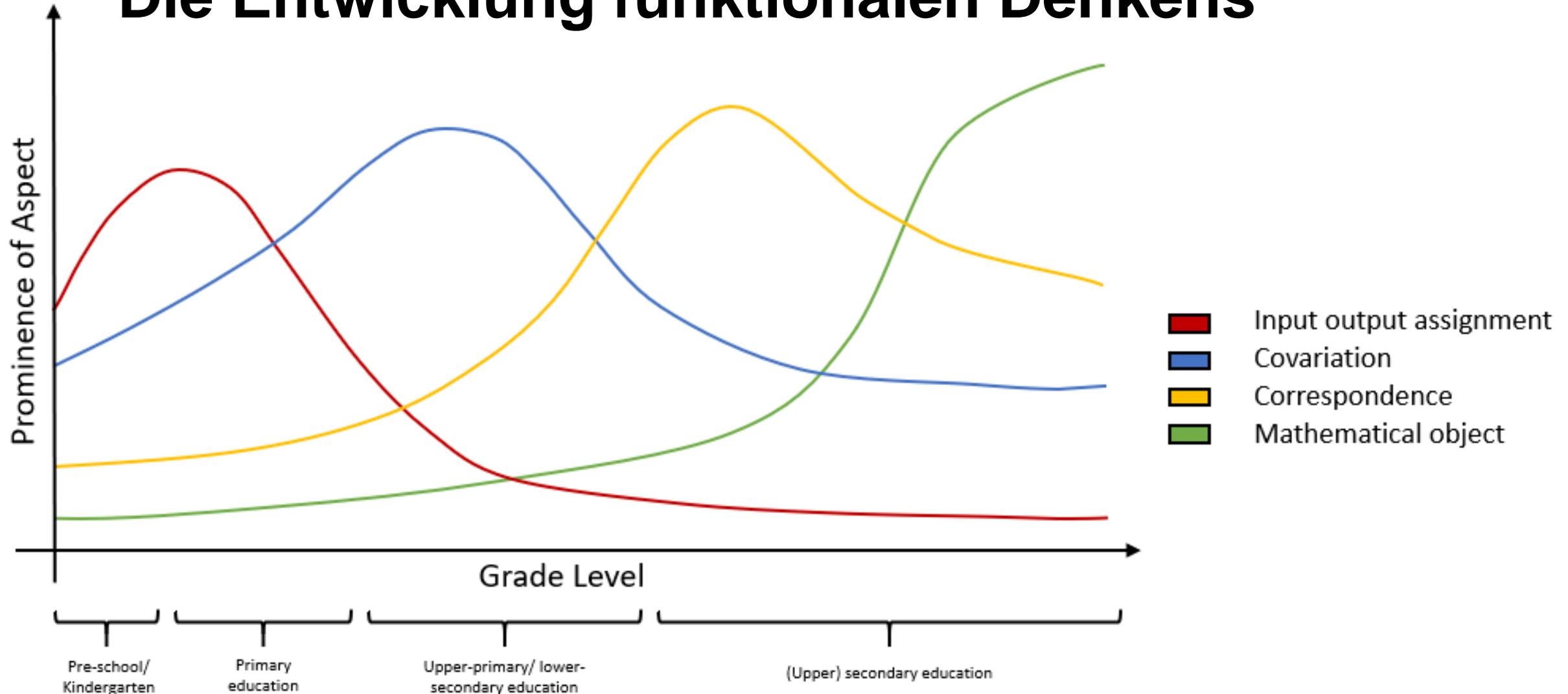
# Grundvorstellungen

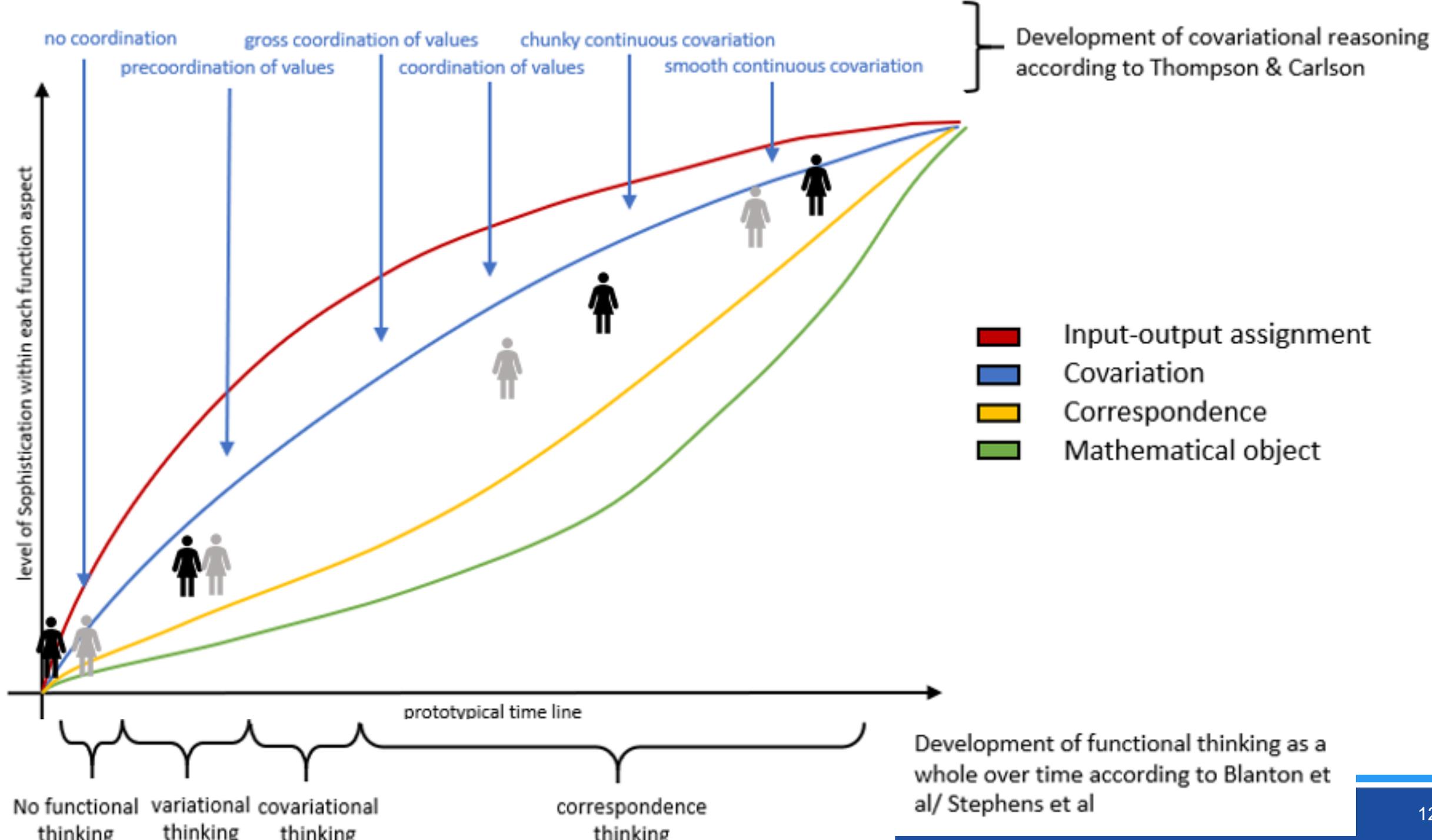
▪ 4 Aspekte:

- **Input-output-Vorstellung**
- **Kovariationsvorstellung**
- **Zuordnungsvorstellung**
- • **Objekt-Vorstellung**

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

# Die Entwicklung funktionalen Denkens





# Funktionales Denken...

- ... als Denken in Zusammenhängen, Abhängigkeiten und Veränderungen (Vollrath, 1989)
- ... ist ein Denken, das typisch für den Umgang mit Funktionen ist (Vollrath, 1989, S.6)



# Funktionen und funktionales Denken

- Was ist funktionales Denken?
- **Die Theorie im Design (einer Lernumgebung)**
- Die Funktion hat viele Gesichter
- Funktionales Denken im eigenen Klassenzimmer

## “embodied design” für Funktionen

### Zentrale Ideen:

- **Alles was eine Person (bewusst) erlebt und wahrnimmt, wird Teil der Kognition**
- **Mathematische Verstehensprozesse können auf körperlichen Erfahrungen/ Bewegungen aufbauen.**
- **“Mathematik in den Fingern” – neue ICT Werkzeuge (z.B. GeoGebra) stellen Möglichkeiten zur Verfügung**

## Arbeitsauftrag B: Die Theorie im Design erkennen

Probieren Sie die digitale Lernumgebung zu Nomogrammen aus.

Finden Sie für jede Grundvorstellung eine passende Aufgabe. Notieren sie diese.

10-15 Minuten

Zu zweit



- **4 Aspekte:**
  - **Input-output-Vorstellung**
  - **Kovariationsvorstellung**
  - **Zurodnungsvorstellung**
  - **Objekt-Vorstellung**

## Austausch

### ▪ 4 Aspekte:

- **Input-output-Vorstellung**
- **Kovariationsvorstellung**
- **Zurodnungsvorstellung**
- **Objekt-Vorstellung**

### ▪ Aufgabe:

- ...
- ...
- ...
- ...

# Designprinzipien der Lernumgebungen



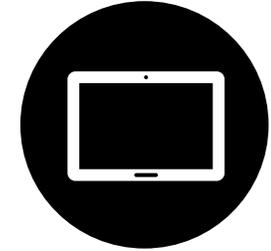
**FORSCHENDES  
LERNEN**



**SITUIERTHEIT**



**EMBODIMENT**



**(DIGITALE)  
WERKZEUGE**

# Funktionen und funktionales Denken

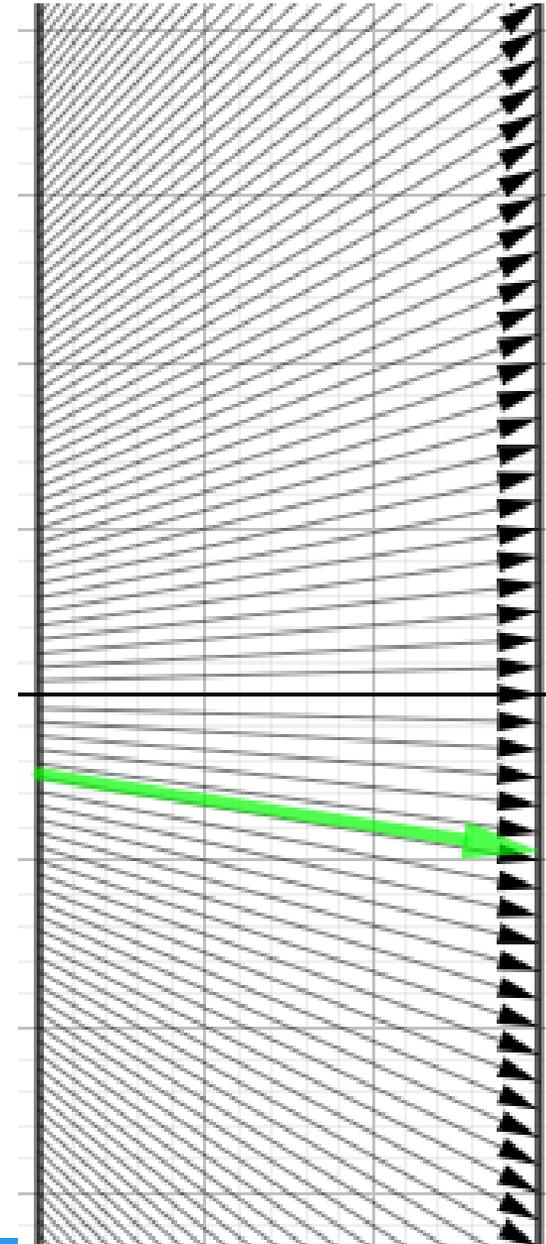
- Was ist funktionales Denken?
- Die Theorie im Design (einer Lernumgebung)
- **Die Funktion hat viele Gesichter**
- Funktionales Denken im eigenen Klassenzimmer

# Funktionsdarstellungen

**Representation is a crucial element for a theory of mathematics teaching and learning, not only because the use of symbolic systems is so important in mathematics, the syntax and semantics of which are rich, varied, and universal but also for two strong reasons: (a) mathematics plays an essential part in conceptualizing the real world, (b) mathematics makes a wide use of homomorphism in which the reduction of structures to another is essential (Vergnaud, 1987, p.227)**

# Funktionsdarstellungen

- Sprache
- Funktionsterme
- Wertetabellen
- ▪ Nomogramme/Pfeilbilder
- Diagramme
- ...



## Arbeitsauftrag C:

Finden sie eine Aufgabe für Lernende, die mit funktionalem Denken gelöst wird. Entwerfen Sie dieselbe Aufgabenstellung in einer anderen Darstellung.

10-15 Minuten

Zu zweit

Danach: Vorstellung der Aufgaben im Plenum

## Exemplarische Aktivitäten bei Darstellungswechseln (Barzel et al., 2021, S. 75)

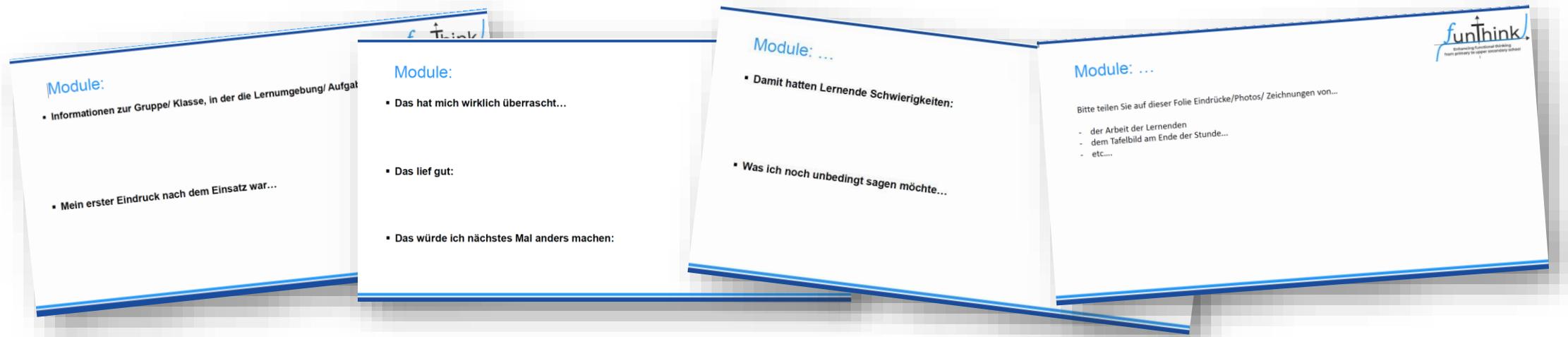
von (↓); nach (→)	Situativ-sprachlich	Numerisch- tabellarisch	Graphisch- visuell	Formal-symbolisch
Situativ-sprachlich	Umformulieren, Realsituationen vereinfachen, reduzieren	Beispielwerte bestimmen	Visualisieren einer Situation, Skizzieren	Modellieren (Annähern, Kurven hindurchlegen)
Numerisch- tabellarisch	Interpretieren der Tabelle bzgl. des Kontexts	Verfeinern oder Vergrößern der Tabelle, Sortieren	Werte in Punktediagramm darstellen	Wachstumsverhalten erkennen
Graphisch-visuell	Interpretieren des Graphen bzgl. eines Kontexts	Werte ablesen	Strecken und Stauchen, Ändern der Achsen-skalierung	Typische Form erkennen, Annähern, Kurven hindurchlegen
Formal-symbolisch	Formeln interpretieren (z. B. durch Deuten der Funktionsparameter)	Argumente einsetzen und Werte bestimmen	Skizzieren, durch Deuten der Funktionsparameter auf typische Form schließen	Algebraisch umformen

# Funktionen und funktionales Denken

- Was ist funktionales Denken?
- Die Theorie im Design (einer Lernumgebung)
- Die Funktion hat viele Gesichter
- **Funktionales Denken im eigenen Klassenzimmer**

# Wie arbeiten wir in der eigenen Klasse weiter?

**Hausaufgabe/ Verabredungen: Probieren Sie eine Lernumgebung/ Aufgabe in ihrer Klasse aus.**

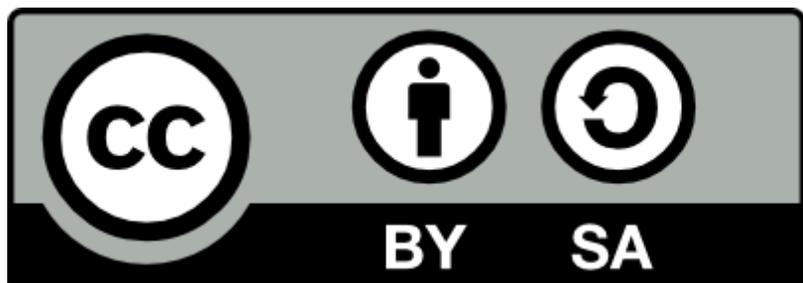


**Teilen Sie mit uns ihre Erfahrungen.**

**Nutzen sie dazu die Folienvorlagen „Report\_classroom\_experience\_with\_FunThink\_module-1“**

Danke für Ihre  
Aufmerksamkeit!

- Adu-Gyamfi, K. (2007). Connections among representations: The nature of students' coordinations on a linear function task. Raleigh: Mathematics science and technology education.
- Barzel, B., Glade, M. & Klinger, M. (2021). Algebra und Funktionen. Berlin: Springer.
- Barzel, B., Hußmann, S. & Leuders, T. (2005). Der "Funktionenführerschein": Wie Schülerinnen und Schüler das Denken in Funktionen wiederholen und festigen können. *Praxis der Mathematik*, 47(2), 20–25.
- Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Murphy Gardiner, A., Isler, I. & Kim, J.S. (2015). The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46-1, 39-87.
- Bodemer, D. & Faust, U. (2006). External and mental referencing of multiple representations. *Computers in Human behavior* 22, 27–42.
- Büchter, A. & Henn, H.-W. (2010). *Elementare Analysis. Von der Anschauung zur Theorie*. Heidelberg: Spektrum.
- Cañadas, M. C., Brizuela, B. M., & Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 87–103. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.004>
- Heinze, A., Star, J. R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM Mathematics Education* 41, 535–540.
- Hußmann, S. & Laakmann, H. (2011). Eine Funktion –viele Gesichter: Darstellen und Darstellungen wechseln. *Praxis der Mathematik in der Schule*, (38), 2–11.
- Leuders, T., & Prediger, S. (2005). Funktioniert's? – Denken in Funktionen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 47(2), 1–7.
- Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *Mathematik lehren*, 103, 8–11.
- Nathan, M. J., & Koedinger, K. R. (2000). An investigation of teachers' beliefs of students' algebra development. *Cognition and Instruction*, 18(2), 209–237.
- Nitsch, R. (2015). Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge. Wiesbaden: Springer.
- Pittalis, M., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2020). Young students' functional thinking modes: The relation between recursive patterning, covariational thinking, and correspondence relations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 51(5), 631–674. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc-2020-0164>
- Rittle-Johnson, B., Schneider, M., & Star, J. (2015). Not a one-way street: Bidirectional relations between procedural and conceptual knowledge of mathematics. *Educational Psychology Review* 27(4), 587–597.
- Ruchniewicz, H. (2022). Sich selbst diagnostizieren und fördern mit digitalen Medien. Wiesbaden: Springer.
- Sproesser U., Vogel M., Dörfler T. & Eichler A. (2018). Begriffswissen zu linearen Funktionen und algebraisch-graphischer Darstellungswechsel: Schülerfehler vs. Lehrereinschätzung. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2018 (S. 1723–1726). Münster: WTM-Verlag.
- Sproesser, U., Vogel, M., Dörfler, T., & Eichler, A. (2020). Typische Lernschwierigkeiten mit Darstellungswechseln bei elementaren Funktionen – Welche Schwierigkeiten kennen Lehrkräfte und wie schätzen sie Aufgabenbearbeitungen ihrer Klassen ein? *Mathematica Didactica* 43(2020)2, 175–198. [http://www.mathematica-didactica.com/Pub/md\\_2020/2020/ges/md\\_2020\\_Sproesser.pdf](http://www.mathematica-didactica.com/Pub/md_2020/2020/ges/md_2020_Sproesser.pdf).
- Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, 10(1), 3–37.
- Warren, E., & Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in Year 2: A case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 6(2), 150–162. <https://doi.org/10.2304/ciec.2005.6.2.5>
- Zindel, C. (2019). Den Kern des Funktionsbegriffs verstehen. Wiesbaden: Springer.



This material is provided by the [FunThink Team](#).  
Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under a Creative Commons License ([CC BY-SA 4.0](#)). Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.







# Module: ...

Bitte teilen Sie auf dieser Folie Eindrücke/Photos/ Zeichnungen von...

- der Arbeit der Lernenden
- dem Tafelbild am Ende der Stunde...
- etc....

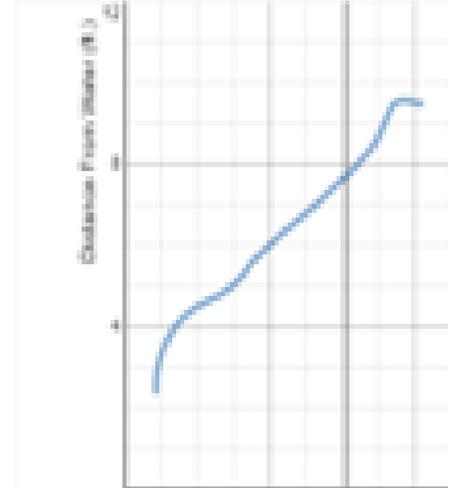
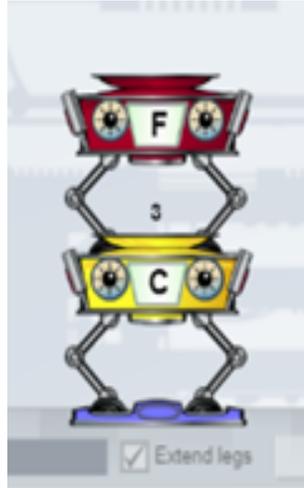


This material is provided by the [FunThink Team](#).  
Unless otherwise noted, this work and its contents are licensed under a Creative Commons License ([CC BY-SA 4.0](#)). Excluded are funding logos and CC icons / module icons.

Co-funded by the  
Erasmus+ Programme  
of the European Union



The European Commission's support for the production of this publication does not constitute an endorsement of the contents, which reflect the views only of the authors, and the Commission cannot be held responsible for any use which may be made of the information contained therein.



## Lehrerfortbildung (6h) – 2. Teil

Ort

Datum

# Funktionales Denken im Unterricht

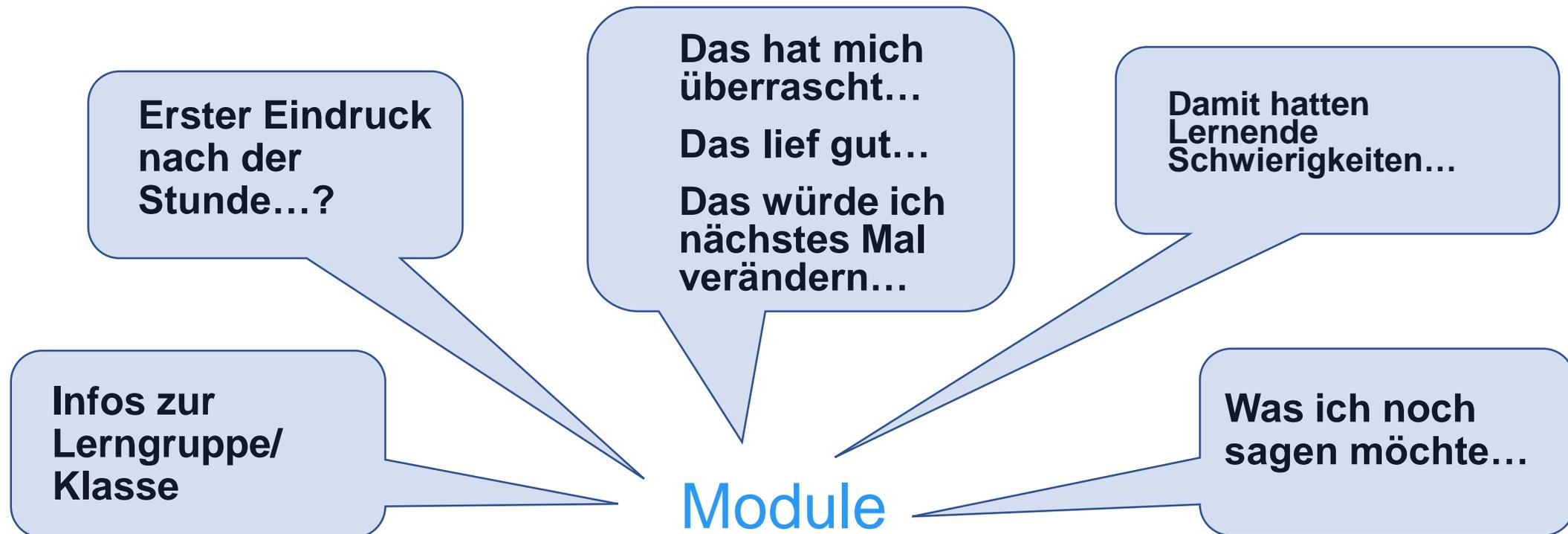
- Austausch über ihre Unterrichtserfahrung
- Vertiefung der Designprinzipien
- Strategien und Schülerschierigkeiten beim funktionalen Denken
- Eine eigene Aktivität designen

# Funktionales Denken im Unterricht

- **Austausch über ihre Unterrichtserfahrung**
- **Vertiefung der Designprinzipien**
- **Strategien und Schülerschierigkeiten beim funktionalen Denken**
- **Eine eigene Aktivität designen**

# Arbeitsauftrag A

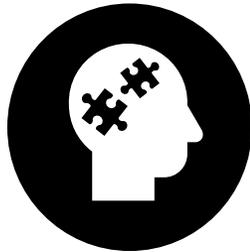
**Distanzphase/ Hausaufgabe: Probieren Sie eine Lernumgebung/ Aufgabe in ihrer Klasse aus.**



# Funktionales Denken im Unterricht

- Austausch über ihre Unterrichtserfahrung
- **Vertiefung der Designprinzipien**
- Strategien und Schülerschierigkeiten beim funktionalen Denken
- Eine eigene Aktivität designen

# Designprinzipien der Lernumgebungen



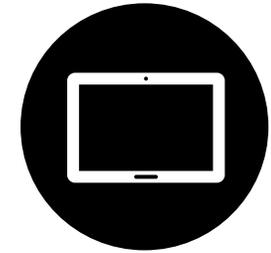
**FORSCHENDES  
LERNEN**



**SITUIERTHEIT**



**EMBODIMENT**



**(DIGITALE)  
WERKZEUGE**

## Dimensionen

- **Eingeschränkte und/oder spezifische Funktionen vs universell einsetzbare Werkzeuge**
- **Mathematische Inhaltsbereiche**

eng miteinander verknüpft

- **Didaktische Funktionen**

- Aufgabenart
- Lehr- und Lernprozess

Teile der Arbeit werden ausgelagert

Variation & Randomisierung von Aufgaben (mit Feedback)

Didactical functionality of digital technology in mathematics education

Do mathematics

Learn mathematics

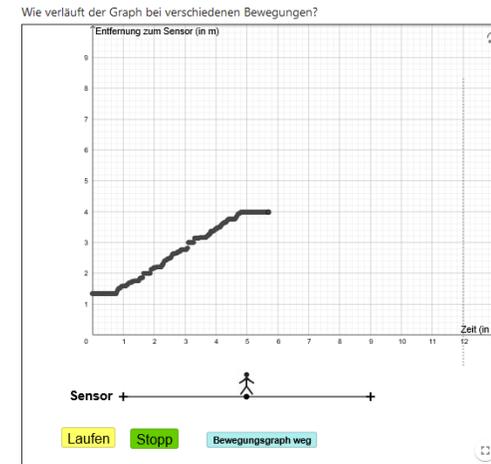
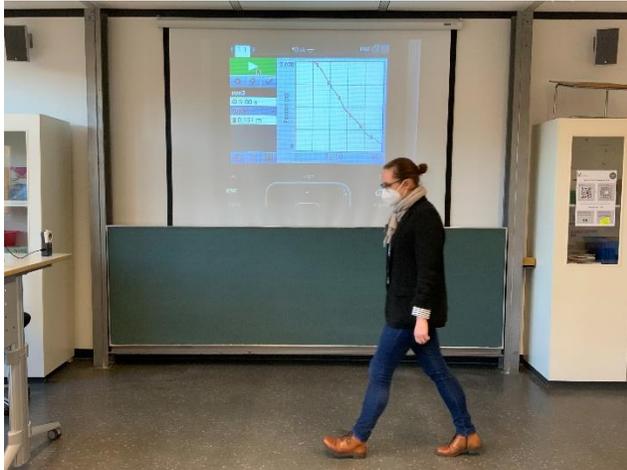
Practice skills

Develop concepts

Phänomene entdecken & Konzepte entwickeln

→ Wichtig für den Einsatz von digitalen Werkzeugen

Wie lassen sich die Dimensionen (allgemeine Funktionalität, Mathematischer Inhaltsbereich, didaktische Funktion) auf die Lernumgebung "Gehgraphen" übertragen?



<https://www.geogebra.org/m/qcgffzap>

## Sensor und Programm:

- Sensor und Programm: eingeschränkte und spezifische Funktionen, Entwicklung von Konzepten

## GeoGebra:

- Hier: spezifische Funktion in einem mathematischen Inhaltsbereich, Entwicklung von Konzepten

## Argumente für Experimente mit gegenständlichen & digitalen Materialien

### Zentrale Forschungsergebnisse (Digel et al., in Druck)

- Simulationen sollen Experimente mit gegenständlichen Materialien ergänzen
  - Förderung Zuordnung durch gegenständliches Experiment
  - Förderung Kovariation insbesondere durch qualitative Simulation
  - Diskurs über Kovariation wesentlich für Lernzuwachs
  - Kovariation auch für Lernende auf niedrigen Kompetenzniveaus zugänglich
- Digitale Umgebungen sollen in Paper-Pencil-Umgebung eingebettet sein
  - Protokollieren unterstützt Reflexion
  - Bessere Verfügbarkeit des Paper-Pencil-Protokolls



**Beste Effekte: Kombination aus beiden Ansätzen**

## Arbeitsauftrag B

Analysieren Sie eine Aufgabe im Hinblick auf die Designprinzipien. Was ist hierbei der Mehrwert des digitalen Werkzeuges? Hilft das Werkzeug funktionales Denken zu entwickeln? Auf welche Weise? Könnte die Aufgabe noch verbessert werden?

10-15 Minuten

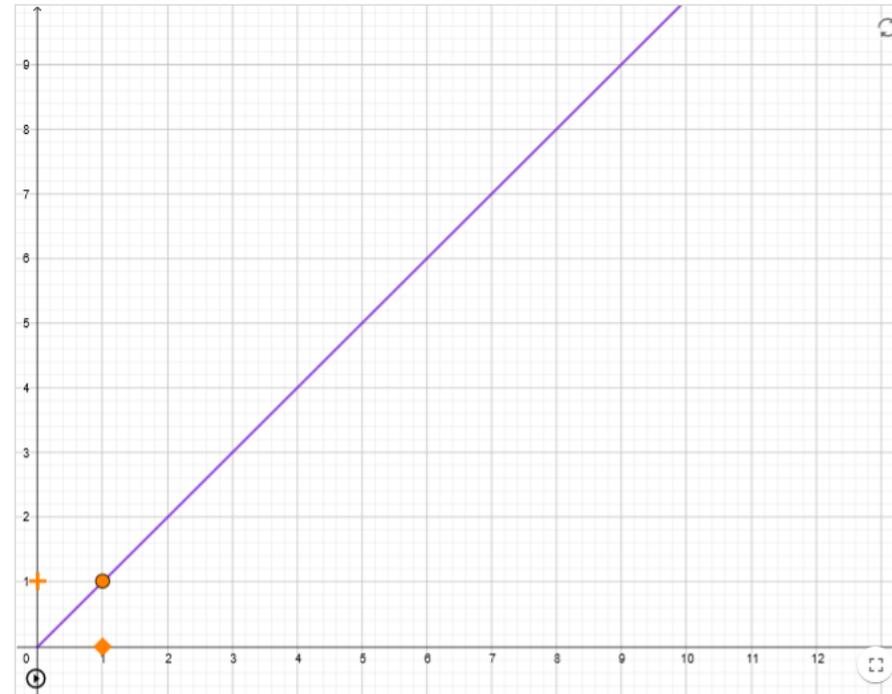
Zu zweit oder dritt

Draw a line - FunThink EN

Autor: FunThink, Veronika Hubenakova

SK version - <https://www.geogebra.org/m/aqc6zjyt>

Click on "+". Then move it to trace the purple line as accurately as possible.



<https://www.geogebra.org/m/bhzb8b6s>

# Funktionales Denken im Unterricht

- Austausch über ihre Unterrichtserfahrung
- Vertiefung der Designprinzipien
- **Strategien und Schülerschierigkeiten beim funktionalen Denken**
- Eine eigene Aktivität designen

## Arbeitsauftrag C: Ein Video aus dem Klassenzimmer

Schauen Sie sich das Video an. Sie sehen zwei Lernende beim Zeichnen und Interpretieren eines Graphen.

Beantworten Sie in Kleingruppen zwei Fragen:

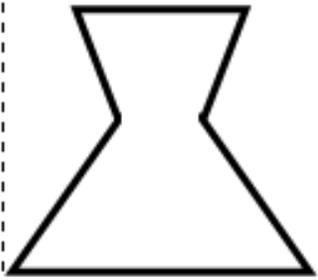
- Beobachten Sie, wie die Lernenden den Graphen interpretieren. Was erkennen Sie?
- Wie könnten Sie in einer solchen Situation die Lernenden unterstützen?
- Was haben Sie sonst noch beobachtet?

10 Minuten

Implementation Video Walking Graphs Exploration anschauen.  
Deutsche Untertitel verfügbar. Link zum Video:  
<https://www.funthink.eu/learning-environments/lower-secondary-education/walking-graphs> (Video nach Login verfügbar)

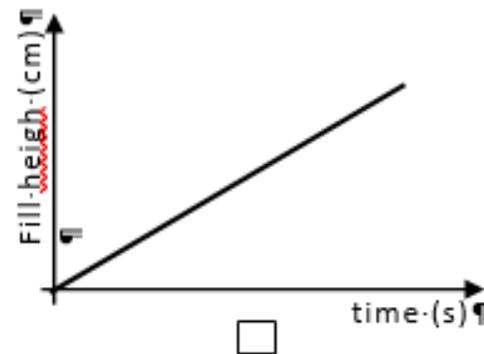
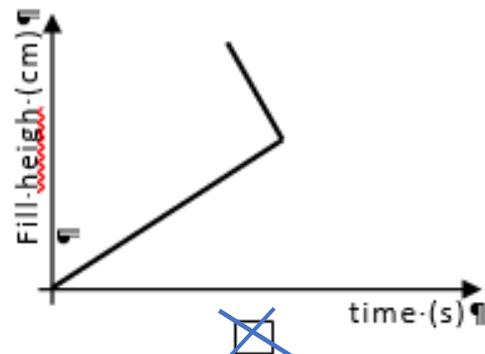
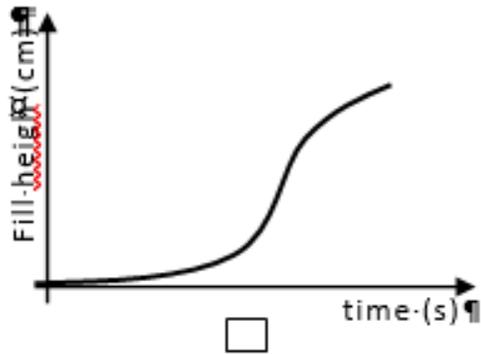
## Exemplarische Aktivitäten bei Darstellungswechseln (Barzel et al., 2021, S. 75)

von (↓); nach (→)	Situativ-sprachlich	Numerisch- tabellarisch	Graphisch- visuell	Formal-symbolisch
Situativ-sprachlich	Umformulieren, Realsituationen vereinfachen, reduzieren	Beispielwerte bestimmen	Visualisieren einer Situation, Skizzieren	Modellieren (Annähern, Kurven hindurchlegen)
Numerisch- tabellarisch	Interpretieren der Tabelle bzgl. des Kontexts	Verfeinern oder Vergrößern der Tabelle, Sortieren	Werte in Punktediagramm darstellen	Wachstumsverhalten erkennen
Graphisch- visuell	<b>Interpretieren des Graphen</b>	Werte ablesen	Strecken und Stauchen, Ändern der Achsen-skalierung	Typische Form erkennen, Annähern, Kurven hindurchlegen
Formal-symbolisch	Formeln interpretieren (z. B. durch Deuten der Funktionsparameter)	Argumente einsetzen und Werte bestimmen	Skizzieren, durch Deuten der Funktionsparameter auf typische Form schließen	Algebraisch umformen



A flower vessel as displayed on the left is filled by a uniform water jet.

Which of the graphs represents best the relationship between time and fill height?



Banken



Graphisch-visuell	Formal-symbolisch
Visualisieren einer Situation, Skizzieren	Modellieren (Annähern, Kurven hindurchlegen)
Werte in Punktediagramm darstellen	Wachstumsverhalten erkennen
Strecken und Stauchen, Ändern der Achsen-skalierung	Typische Form erkennen, Annähern, Kurven hindurchlegen
Skizzieren, durch Deuten der Funktionsparameter auf typische Form schließen	Algebraisch umformen

	visuell	<b>Interpretieren des Graphen</b>	
Formal-symbolisch		Formeln interpretieren (z. B. durch Deuten der Funktionsparameter)	Argumente einsetzen und Werte bestimmen

## Exemplarische Aktivitäten bei Darstellungswechseln (Barzel et al., 2021, S. 75)

von (↓); nach (→)	Situativ-sprachlich	Numerisch-tabellarisch	Graphisch-visuell	Formal-symbolisch
Situativ-sprachlich	Umformulieren, Realsituationen vereinfachen, reduzieren	Beispielwerte bestimmen	<b>Visualisieren einer Situation</b>	Modellieren (Annähern, Kurven hindurchlegen)
Numerisch-tabellarisch	Interpretieren der Tabelle bzgl. des Kontexts	Verfeinern oder Vergrößern der Tabelle, Sortieren	Werte in Punkte, Diagramm darstellen	Wachstumsverhalten erkennen
Graphisch-visuell	Interpretieren des Graphen bzgl. eines Kontexts	Werte ablesen	Strecken und Stauchen, Ändern der Achsen-skalierung	Typische Form erkennen, Annähern, Kurven hindurchlegen
Formal-symbolisch	Formeln interpretieren (z. B. durch Deuten der Funktionsparameter)	Argumente einsetzen und Werte bestimmen	Skizzieren, durch Deuten der Funktionsparameter auf typische Form schließen	Algebraisch umformen

**Aufgabe 5**

A flower vessel as displayed on the left is filled by a uniform water jet.

Draw the function graph that expresses the relationship between time and filling level!

**Visualisieren einer Situation**

von (↓):	Situativ-sprachlich	Numerisch-	Graphisch-visuell	Formal-symbolisch
			Modellieren Annähern, Kurven hindurchlegen)	Wachstumsverhalten erkennen
			Strecken und Stauchen, Ändern der Achsen-skalierung	Typische Form erkennen, Annähern, Kurven hindurchlegen
	symbolisch	interpretieren (z. B. durch Deuten der Funktionsparameter)	Skizzieren, durch Deuten der Funktionsparameter auf typische Form schließen	Algebraisch umformen

# Strategien und Schülerschwierigkeiten beim funktionalen Denken

**Aufgabe 5**

A flower vessel as displayed on the left is filled by a uniform water jet.

Draw the function graph that expresses the relationship between time and filling level!

**Visualisieren einer Situation**

von (↓):	Situativ-sprachlich	Numerisch-	Graphisch-visuell	Formal-symbolisch
			er r eren	Modellieren Annähern, Kurven hindurchlegen)
			Werte in Punkte diagramm dar- stellen	Wachstumsver- halten erkennen
			Strecken und Stauchen, Ändern der Achsen- skalierung	Typische Form erkennen, Annähern, Kurven hindurchlegen
	symbolisch	interpretieren (z. B. durch Deuten der Funktionsparameter)	setzen und Werte bestimmen	Algebraisch umformen

# Strategien und Schülerschwierigkeiten beim funktionalen Denken

**Aufgabe 5**

A flower vessel as displayed on the left is filled by a uniform water jet.

Draw the function graph that expresses the relationship between time and filling level!

**Visualisieren einer Situation**

von (↓):	Situativ-sprachlich	Numerisch-	Graphisch-visuell	Formal-symbolisch
			<p>Modellieren Annähern, Kurven hindurchlegen)</p> <p>Wachstumsverhalten erkennen</p>	
			<p>Strecken und Stauchen, Ändern der Achsen-skalierung</p>	<p>Typische Form erkennen, Annähern, Kurven hindurchlegen</p>
	<p>symbolisch</p>	<p>pretieren (z. B. durch Deuten der Funktionsparameter)</p>	<p>Skizzieren, durch Deuten der Funktionsparameter auf typische Form schließen</p>	<p>Algebraisch umformen</p>

# Strategien und Schülerschwierigkeiten beim funktionalen Denken

**Aufgabe 5**

A flower vessel as displayed on the left is filled by a uniform water jet.

Draw the function graph that expresses the relationship between time and filling level!

**Visualisieren einer Situation**

von (↓):	Situativ-sprachlich	Numerisch-	Graphisch-visuell	Formal-symbolisch
			<p>Modellieren                      Annähern, Kurven hindurchlegen)</p>	
			<p>Strecken und Stauchen, Ändern der Achsen-skalierung</p>	<p>Wachstumsverhalten erkennen</p>
	<p>symbolisch</p>	<p>interpretieren (z. B. durch Deuten der Funktionsparameter)</p>	<p>Skizzieren, durch Deuten der Funktionsparameter auf typische Form schließen</p>	<p>Algebraisch umformen</p>

# Strategien und Schülerschwierigkeiten beim funktionalen Denken

**Aufgabe 5**

A flower vessel as displayed on the left is filled by a uniform water jet. Draw the function graph that expresses the relationship between time and filling level!

**Visualisieren einer Situation**

von (↓):	Situativ-sprachlich	Numerisch-	Graphisch-visuell	Formal-symbolisch
			Modellieren Annähern, Kurven hindurchlegen)	
			Strecken und Stauchen, Ändern der Achsen-skalierung	Typische Form erkennen, Annähern, Kurven hindurchlegen
			Skizzieren, durch Deuten der Funktionsparameter auf typische Form schließen	Algebraisch umformen
	symbolisch	interpretieren (z. B. durch Deuten der Funktionsparameter)	setzen und Werte bestimmen	

# Funktionales Denken im Unterricht

- Austausch über ihre Unterrichtserfahrung
- Vertiefung der Designprinzipien
- Strategien und Schülerschierigkeiten beim funktionalen Denken
- **Eine eigene Aktivität designen**

## Arbeitsauftrag D: Eine eigene Aufgabe entwerfen

Schauen Sie in Schulbüchern nach Aufgaben zur Förderung funktionalen Denkens.

1. Finden Sie drei Aufgaben, die funktionales Denken fördern. Welche Designprinzipien sind berücksichtigt?
2. Suchen Sie sich eine Aufgabe aus, die im Hinblick auf ein oder mehrere Designprinzipien verbessert werden kann. Verändern Sie diese Aufgabe.

20-25 Minuten

Zu zweit oder dritt

# Lernziele...

Sie können

- in eigenen Worten formulieren, was funktionales Denken bedeutet.
- verschiedene Grundvorstellungen in Aufgaben erkennen und benennen.
- Möglichkeit der Entwicklung funktionalen Denkens in der Sek.I benennen.
- Schülerschwierigkeiten und –strategien beim funktionalen Denken analysieren.
- Unterschiede beim funktionalen Denken von Lernenden diagnostizieren.
- ...

Danke für Ihre  
Aufmerksamkeit!

- Balacheff, N., & Kaput, J. J. (1997). Computer-based learning environments in mathematics. In A. J. Bishop et al. (Hg.), *International Handbook of Mathematics Education* (S. 469–501). Springer.
- Barzel, B. & Ganter, S. (2010). Experimentell zum Funktionsbegriff. *Praxis der Mathematik in der Schule*, (31), 14–19.
- Digel, S., Engelhardt, A. & Roth, J. (im Druck). Digital gerahmte Experimentierumgebungen als dynamischer Zugang zu Funktionen. In J. Roth, M. Baum, K. Eilerts, G. Hornung, & T. Trefzger (Hrsg.). *Die Zukunft des MINT-Lernens - Band 2: Digitale Tools und Methoden für das Lehren und Lernen*. Springer.
- Drijvers, P. (2019). Embodied instrumentation: combining different views on using digital technology in mathematics education. Utrecht University. Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics, Utrecht, Netherlands. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02436279>
- Hoffkamp, A. (2012). Funktionales Denken mit dem Computer unterstützen - Empirische Untersuchungen im Rahmen des propädeutischen Unterrichts der Analysis. In U. Kortenkamp (Hrsg.), *Zur Zukunft des Analysisunterrichts vor dem Hintergrund der Verfügbarkeit Neuer Medien (und Werkzeuge)* (S. 51–56). Franzbecker.
- Hoyles, C. (2018). Transforming the mathematical practices of learners and teachers through digital technology. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 209–228. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1484799>
- Johnson, H. L. (2015). Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics*, 89(1), 89–110.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research* 60 (1), 1–64.
- Lichti, M. (2019). *Funktionales Denken fördern: Experimentieren mit gegenständlichen Materialien oder Computer-Simulationen*. Springer.
- Ludwig, M. & Oldenburg, R. (2007). Lernen durch Experimentieren: Handlungsorientierte Zugänge zur Mathematik. *mathematik lehren*. (141), 4–11.
- Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *Mathematik lehren*, 103, 8–11.
- Monaghan, J., Trouche, L., & Borwein, J. M. (2016). Tools and mathematics: Instruments for learning. Mathematics Education library. Springer.
- Roth, J. (2008). Systematische Variation: Eine Lernumgebung vernetzt Geometrie und Algebra. *mathematik lehren*. (146), 17–21.
- Stellmacher, H. (1986). Die nichtquantitative Beschreibung von Funktionen durch Graphen beim Einführungsunterricht. In G. von Harten, H. N. Jahnke, T. Mormann, M. Otte, F. Seeger, H. Steinbring & H. Stellmacher (Hrsg.), *Funktionsbegriff und funktionales Denken* (S. 21–34). Aulis Deubner.
- Vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellungen. *mathematik lehren*. (118), 4–8.
- Weigand, H. (1988). Zur Bedeutung der Darstellungsform für das Entdecken von Funktionseigenschaften. *Journal für Mathematik-Didaktik* 9, 287–325.